輔仁管理評論

中華民國 109 年 5 月，第二十七卷第二期，1-38

金融產品創新及其定價：移動平均交換選擇權

韓千山・邱嘉洲・蔡鎮宇・簡榮治*

(收稿日期：107 年 12 月 12 日；第一次修正：108 年 02 月 21 日；
接受刊登：108 年 03 月 15 日)

摘要

本文探討金融產品創新及其定價，討論移動平均交換選擇權。本文主要是延伸 Margrabe (1978) 歐式交換選擇權，將其報償-二項資產價格正差距，延伸為以算術或幾何計算二項資產價格移動平均正差距。一般選擇權分為歐式與美式。美式選擇權價值相當於歐式選擇權價值加上提前履約溢酬 (early exercise premium)。尤有甚者，美式選擇權不會提前履約情況發生時，則歐式選擇權等價於美式選擇權。因此，本文提供歐式選擇權的觀點，有助於探討該選擇權特性。

另外，以股票資產為例，股票移動平均價格視為交易實務上股票陸續出售或分開時段變現時投資組合之平均價值，亦或股票陸續買進或分開時段佈局時投資組合之平均建構成本。而且，在股票價差交易 (spread trade) 的交易實務上，移動平均交換選擇權亦提供良好的避險工具。

最後，本文提供數值積分法與 (解析) 封閉解法等評價歐式算術、幾何移動平均交換選擇權，運用蒙地卡羅法佐證其精確性，並且提供風險衡量，例如，Delta, Gamma 等，運用於該選擇權之風險管理及其投資組合避險等工作。

關鍵詞彙：移動平均交換選擇權，移動平均，交換選擇權，歐式選擇權

壹·緒論

平均為概念之選擇權，最早可追溯至 1987 年亞式選擇權 (Asian option) [1]，由於市場人士喜愛之後蓬勃發展，有時直接出現在櫃檯買賣交易所，有時則內嵌入財務契約之中，可能原因在於：特別是在淺碟交易市場中 (例如，原油市場)，平均特性讓市場人士不易操控該選擇權價值；一般而言，以平均股

* 作者簡介：韓千山，輔仁大學金融與國際企業學系副教授；邱嘉洲，輔仁大學金融與國際企業學系助理教授，通訊作者；蔡鎮宇，新北市政府採購處技士；簡榮治，國泰世華銀行私人銀行事業處私人銀行部客戶服務經理。

[1] 1987 年時 Mark Standish 與 David Spaughton 在東京發展出能夠商業使用之選擇權定價公式，其選擇權報償連結至原油平均價格。當時他們稱這選擇權為新奇選擇權 (exotic option)，而當代財務文獻上通常稱為亞式選擇權，其主要原因是東京地處亞洲之緣故。

價之選擇權比標準歐式選擇權價值低，主要原因在於波動度因股價平均而減少，從而選擇權價值較低，當市場採用此種衍生性商品避險，則其避險成本較低。平均方式分為兩種：一種是幾何平均，是與股價連乘有關；另一種是算術平均，是將股價相加後平均。幾何平均亞式選擇權，以買權為例，其報償為股價幾何平均值與執行價差值且與零比較之孰大者，這樣選擇權其定價相對容易，主要原因是有類似於 Black and Scholes (1973) 與 Merton (1973) 架構下之封閉解 (Turnbull and Wakeman, 1991)。算術平均亞式買權，其報償為股價算術平均值與執行價差值且與零比較之孰大者。眾所熟知，這樣的選擇權評價上比較複雜，例如，Kemna and Vorst (1990) 以偏微分方程分析出算術平均亞式買權沒有封閉解。主要原因在於，對數常態分配相加總並非為對數常態分配。由此，促成學者們提出各種解決方案，諸如：蒙地卡羅模擬法、格子及評價樹、偏微分方程法、一般數值法、及解析封閉解法等 (Milevsky and Posner, 1998)。

與本文相關之亞式選擇權評價方法，例如，蒙地卡羅模擬法的文獻，諸如：Kemna and Vorst (1990) 利用幾何平均亞式選擇權作為控制變數對算術平均亞式選擇權進行評價；Boyle, Broadie, and Glasserman (1997) 針對反向變數法、控制變數法、動差配合法以及分層抽樣法等進行評價效率比較，指出以幾何平均亞式選擇權當作控制變數來評價算術平均亞式選擇權最有效率。另外，解析封閉解的文獻，諸如，Turnbull and Wakeman (1991) 運用 Edgeworth 級數近似對數常態有限和之分配，提供亞式選擇權解析封閉解；Levy (1992) 利用近似機率分配的方法來解決算術平均亞式選擇權評價問題，主要以對數常態分配來近似對數常態有限和之分配，進而以一階、二階動差配適，推導出該選擇權解析封閉解。Vorst (1992) 提出調整算術平均亞式選擇權執行價格，使之成為幾何平均亞式選擇權，進而以幾何平均亞式選擇權封閉解近似算術平均亞式選擇權。Milevsky and Posner (1998) 以 Reciprocal Gamma 分配評價算術平均亞式選擇權，所謂 Reciprocal Gamma 分配即是對數常態隨機變數無窮和之分配，以此近似對數常態隨機變數有限和之分配。由此，他們獲得解析封閉解公式，快速且精確評價。

移動平均概念迥異於一般平均概念，但常見於財務市場上－技術分析。通常移動平均分為長期移動平均與短期移動平均。當短期移動平均由下而上穿過長期移動平均，稱為「黃金交叉」，代表股價下跌趨勢已經停止，而且上漲趨勢開始形成，建議投資者買進；當短期移動平均由上而下穿過長期移動平均，稱為「死亡交叉」，代表支撐線被向下突破，表示股價將繼續滑落、行情

看跌，建議投資者賣出。由此可以看出，移動平均概念代表著所形成的價格趨勢。另外，一般在建構投資組合時通常有佈局上的時差，亦在不影響市場價格下採用分段方式建構，是故，投資組合成本即為股票移動平均價格。反之，股票移動平均價格即為出售投資組合之平均價值。本文採用這樣的觀點，亦即是：當考慮資產交換交易時，則資產交換價值須採用資產移動平均價格。當長期建構持有之投資組合，如欲調節成為目前短期持有之投資組合時，可以賣出長期建構持有之投資組合，且用其所得價金買入目前短期建構投資組合，假如長期建構持有之投資組合成本相較低於目前市場價格時，這樣操作可以實現帳面利益。同理，亦可跨資產操作，例如：交易實務上「價差交易策略」。然而，這些資產交換交易的調整，是為基礎證券調整，而且在基礎證券市場上此種資產的調整常伴隨相當大的交易成本 (例如：證交稅、手續費、流動性不足產生的交易成本…等)。倘若有避險需求，為了降低資產調整所伴隨的交易成本，則可以在衍生性商品市場上避險。在此情形下，本文提供在衍生性商品市場上另類的選擇權商品，做為資產交換交易之避險工具－移動平均交換選擇權，其報償即為二項資產移動平均價格差值且與零比較之孰大者。

簡單地說，移動平均交換選擇權是為具有文獻上三項特質衍生性商品：亞式、交換、以及移動平均，以股票資產為例，其報償則與二項股票移動平均價格有關。且當二項移動平均股價所採用為相同標的股票時，則本文稱此種選擇權為「黃金交叉選擇權」。另外，不同標的股票且為單日移動平均時，則此種選擇權簡化為「交換選擇權」 (Margrabe, 1978)。從計算方面區分，也有算術平均與幾何平均兩種選擇權。如同亞式選擇權，幾何移動平均交換選擇權比較能有效且快速地評價，算術移動平均交換選擇權則須以近似方法加以評價，屬於比較棘手的評價問題。文獻上，類似移動平均概念下衍生性商品有：「移動平均重設選擇權」及「移動平均障礙選擇權」。例如，Kao and Lyuu (2003) 提出「幾何、算術移動平均回顧選擇權」，其選擇權執行價為股票移動平均在期間內之最小者；以及「幾何、算術移動平均重設選擇權」，其選擇權執行價亦為股票移動平均，然而期間由契約訂定。他們提供評價樹演算法評價美式、歐式選擇權。Dai, Fang, and Lyuu (2005) 提供幾何平均所發動重設歐式選擇權解析公式。以上這些為移動平均重設選擇權。另外，其它為移動平均障礙選擇權，諸如：Dai, Li, and Zhang (2010) 提出以格子演算法評價美式、歐式移動平均障礙選擇權；Heritage (2002) 提供歐式移動平均障礙選擇權解析公式。因此，對應於移動平均交換選擇權的實用性及重要性，本文率先提供數值積分法及 (解析) 封閉解法等評價歐式算術、幾何移動平均交換選擇權，並且以蒙地

卡羅法佐證其精確性，以及提供風險衡量，例如，Delta, Gamma 等，運用於該選擇權風險管理及其投資組合避險等工作。

本文主要貢獻為：定義及介紹給市場人士創新的金融商品－移動平均交換選擇權，說明此選擇權評價及其運用；在文獻上另類移動平均衍生性商品；提出蒙地卡羅模擬法、數值積分法以及 (解析) 封閉解法等評價模式；提供風險衡量計算公式，例如，Delta, Gamma,…等，可以運用於該選擇權風險管理及其投資組合避險等工作。

貳·移動平均交換選擇權

本文所評價的衍生性商品為移動平均交換選擇權。移動平均概念代表著股價所形成的價格趨勢，亦代表著投資組合之平均價值。當考慮資產交換交易時，則資產交換價值須採用資產移動平均價格。為何會有資產交換交易產生？試想：基金經理人在長期的投資環境中，為了實現帳面利益，會將原先投資標的處份且認列帳面利益後，再繼續投資原先標的或不同於原先其他標的。亦或，基金經理人觀看全球不同財務商品標的漲跌，出清弱勢財務商品標的，買進強勢財務商品標的，例如:交易實務上「價差交易操作策略」，尤有甚者，跨市場調節不同財務商品標的。基金經理人這些舉動主要是為了讓投資人財富保值、增值，而免於縮水、減值。是故，資產交換交易的需求與日俱增，以資產交換交易為目的之該衍生性商品應運而生 -- 移動平均交換選擇權，其報償取值為二項資產移動平均價格差值且與零比較之孰大者。

接著，以股票資產為例，從投資人角度介紹該選擇權操作策略。主要作用在於：移動平均交換選擇權是為權利，且具備衍生性商品基本特性一交易成本低的避險工具。假定投資人持有長期以不同時段建構之標的股票，其標的平均成本可以為該標的股票在建構期間股票平均值表示，亦即是長期股票移動平均價格。當預計該標的股票價格受經濟景氣因素影響，會一直往上漲。簡單的作法，出清現貨實現帳面利益，再行購買、建構現階段之股票一這些為短期股票移動平均價格。此種財務操作可以實現帳面利益，其值為短期股票移動平均價格減去長期股票移動平均價格。亦或，不同標的股票相較於長期持有之股票，其股票價格一直漲，則跨不同財務商品操作，出清現貨，再行購買不同標的股票或其它財務商品，以達資產配置的需要。這樣資產交換交易之財務操作，其獲利為不同財務商品之短期移動平均價格減去原先長期持有標的股票之長期股票移動平均價格。為了實現帳面利益、亦或資產交換交易以達資產配置

效果，均面臨現貨交易所產生相當大的交易成本。另外，買賣現貨均為權利與義務對等，如僅為避險需求，不須暴露於買賣價格風險。此時，選擇權則可以有效進行財務操作，降低風險，以達資產配置的需要。例如，長期持有標的股票之投資人持有短均減長均之移動平均交換選擇權，則短均大於長均時，投資人相當於持有現階段建構之標的股票，代表獲利，另一種為長均大於短均時，投資人維持原來長期分不同時段建構之標的股票，其選擇權權利金即為所損失的避險成本。其它如跨不同財務商品間操作，其論述相同，不再贅述。

為了說明起見，本文採用標的資產為股票資產，且其股票價格以 S_t 表示。股票移動平均價格，以 A_t 表示，且以 30 日為例 $(t \geq 29)$，則 30 日移動平均為：

$$A_t = \frac{S_{t-29} + S_{t-28} + S_{t-27} + \ldots + S_{t-2} + S_{t-1} + S_t}{30}$$

如果，在前一日的 30 日移動平均，為

$$A_{t-1} = \frac{S_{t-30} + S_{t-29} + S_{t-28} + \ldots + S_{t-3} + S_{t-2} + S_{t-1}}{30}$$

亦即是 A_t 仍然與之前股票價格 S_{t-30} 有關，因為

$$A_t = A_{t-1} - \frac{S_{t-30} - S_t}{30}$$

代表過程 (A_t, S_t) 不是「馬可夫過程」。相較於亞式選擇權一般平均 (往前全部平均) ，以 m 表示，且 $m_t = t/(1+t)\, m_{t-1} + 1/(1+t)\, S_t$ ，則是 「馬可夫過程」 (Kao and Lyuu, 2003)。由此可見，移動平均之衍生性商品有著亞式選擇權未包含特性，評價較為複雜。

本文建議選擇權如同交換選擇權一般，為二項標的資產交換之選擇權，但是平均價值則採用股票移動平均價格，其報償為二項股票移動平均價格差值且與零比較之孰大者，如下式表示：

$$\text{Max}\,(A_{X,n} - A_{Y,m}, 0) \tag{1}$$

其中 $A_{X,n}$ 為 X 股票價格 n 日移動平均，$A_{Y,m}$ 為 Y 股票價格 m 日移動平均。當 n 與 m 同為 1 時 ，此種選擇權簡化為文獻上「交換選擇權 (exchange option)」，當 n 與 m 皆大於 1 時，本文稱為「移動平均交換選擇權」，當 n 與 m 皆大於 1 且 X 與 Y 為相同標的股票時，本文稱為「黃金交叉選擇權」。平均方式有算術平均及幾何平均，由於算術平均在計算上有著便利性，一般在選擇權市場上通常採用算術平均。另外，此種選擇權如同一般選擇權，倘若契約訂定提早履約條款時，稱為美式選擇權，如若僅在到期日履約者，則稱為歐式選擇權。美式選擇權價值相當於歐式選擇權價值加上提前履

約溢酬 (early exercise premium)。尤有甚者，美式選擇權不會提前履約情況發生時，則歐式選擇權等價於美式選擇權。因此，本文提供歐式選擇權的觀點，有助於探討該選擇權特性。

參·移動平均交換選擇權評價

在第貳章，我們定義移動平均交換選擇權，而且介紹在財務市場上該如何使用這種選擇權。該選擇權具備文獻上三項特性：亞式、交換、以及移動平均，其所對應之衍生性商品為「亞式選擇權」、「交換選擇權」、以及移動平均之衍生性商品，譬如說：「移動平均重設選擇權」、「移動平均障礙選擇權」。亦即是，本文建議移動平均交換選擇權延伸文獻上亞式、交換、以及移動平均等選擇權，是為另類移動平均之衍生性商品，足見其在學術上的重要性。另外，如同期貨交易所上市掛牌的標準選擇權一般，移動平均交換選擇權在市場上有實際用途及需求 (第貳章)。當能夠進一步提供該商品正確評價及相關風險衡量時，投資人或發行人了解商品合理價位以及相關風險控管工作，則該選擇權一定能夠在財務市場上蓬勃發展。為了這樣的目的，本文率先提供歐式移動平均交換選擇權之快速、精確的評價方法，並且提供相關風險衡量，例如，Delta, Gamma,…等，以利該選擇權風險管理及其避險等工作。

一、模型設定

本文依循 Black and Scholes (1973) 交易環境設定如下：(1) 沒有交易成本、沒有稅、沒有借貸限制、交易連續；(2) 利率為平坦曲線結構且不具隨機性；(3) 股票價格服從幾何布朗運動 (geometric Brownian motion)，其隨機過程表示如下：

$$dS / S = \alpha\, dt + \theta\, dZ \tag{2}$$

其中 S 為股票價格、α 為股票報酬率期望值、θ 為股票報酬率標準差、以及 Z 為標準布朗運動。依照 式(2) 股票價格動態，則當期與前期股票價格之一期關係為[2]：

[2] 一般財務區間 1 代表 1 年。此處則用一期的參數描述當期與前期股票價格之關係。依照 式(2) 股票價格動態描述，考慮一期，區間為 Δt，且經由 Ito's lemma 轉換，關係式成為 $S(t) = S(t-\Delta t)\exp[(\alpha-1/2\,\theta^2)\,\Delta t + \theta Z(\Delta t)]$。接著，令 $\alpha\Delta t$ 為一期股票報酬率期望值、 $\theta^2\Delta t$ 為一期股票報酬率變異數，且 $\theta Z(\Delta t)$ 等於 $\theta\sqrt{\Delta t}$ 乘於標準常態隨機變數。因此，以一期概念及參數，且沿用 式(2) 符號，即成為 式(3)。

$$S(t) = S(t-1)\ e^{\alpha - 1/2\,\theta^2 + \theta Z} \tag{3}$$

其中 $S(t)$ 為當期股票價格、$S(t-1)$ 為前期股票價格、α 為一期股票報酬率期望值、θ 為一期股票報酬率標準差、以及 Z 為標準常態隨機變數。若給定前期股票價格，當期股票價格亦可改寫為：

$$S(t) = S(t-1)\,R(t) \tag{4}$$

其中 $R(t)$ 等於 $S(t) / S(t-1)$，是為股票價格毛報酬率 (gross rate of return)，計算則依：

$$R(t) = e^{\alpha - 1/2\,\theta^2 + \theta Z} \tag{5}$$

由此可知，股票價格毛報酬率服從對數常態分配。另外，當有二項 (X, Y) 股票價格動態服從 式(2) 時，其二項動態的相關性則設定為 ρ，亦即是 $dZ^X\,dZ^Y = \rho\,dt$，此舉等同於設定一期之二元標準常態隨機變數 (Z^X, Z^Y) 之相關係數為 ρ。

二、幾何移動平均交換選擇權之評價

本節介紹幾何移動平均交換選擇權，其報償依 式(1)，其平均方式採用股票幾何移動平均價格，如下式表示：

$$A_{X,n}(t) = [\, S^X(t-n+1)\, S^X(t-n+2)\, S^X(t-n+3) \ldots S^X(t) \,]^{1/n}$$
$$A_{Y,m}(t) = [\, S^Y(t-m+1)\, S^Y(t-m+2)\, S^Y(t-m+3) \ldots S^Y(t) \,]^{1/m} \tag{6}$$

其中 $A_{X,n}(t)$ 為 X 股票 n 日幾何移動平均價格、$A_{Y,m}(t)$ 為 Y 股票 m 日幾何移動平均價格。

本文將 $C(S_X(t), S_Y(t); T, n, m, \rho, \theta_X, \theta_Y, r)$ 代表為歐式選擇權價值，且其報償依幾何移動平均決定。該選擇權在 T 時點到期 (年)，n 為 X 股票價格平均日數、m 為 Y 股票價格平均日數、θ_X 為 X 股票波動度 (年)、θ_Y 為 Y 股票波動度 (年)、ρ 為 (X, Y) 股票相關係數、以及 r 為無風險利率。到期時，選擇權的價值為：

$$C(A_{X,n}(T), A_{Y,m}(T); T, n, m) = \max [\, A_{X,n}(T) - A_{Y,m}(T), 0 \,] \tag{7}$$

為了評價目的，採用傳統風險中立論述，例如： Black and Myron (1973) 與 Merton (1973) 等。股票期望報酬率為無風險利率，以 r 表示，亦即是，式(2)、式(3) 之 α 由 r 取代。另外，在風險中立測度下，以其他資產計價之財務商品價格服從 「平賭過程」。在這樣的調整下，選擇權價值即為：

$$C(S_X(t), S_Y(t); T, n, m, \rho, \theta_X, \theta_Y, r) = \exp [- r (T- t)]\cdot$$
$$E_t [\max(A_{X,n} (T) - A_{Y,m} (T), 0)] \tag{8}$$

為求得簡便計算公式，則須將 式(8) 期望值公式明顯的寫出來，亦即是須求得 $[A_{X,n} (T), A_{Y,m} (T)]$ 風險中立測度下聯合機率分配。值得注意的是，幾何移動平均 $A_{.,n} (T)$ 在風險中立測度下邊際機率分配為對數常態分配，其主要的理由在於 式(5) R(t) 為對數常態分配，如將 $A_{.,n} (T)$ 取其對數時，即成為對數常態隨機變數 R(t) 取對數後之和，符合常態分配，所以幾何移動平均 $A_{.,n} (T)$ 維持原先對數常態的分配。當取對數後 $\ln A_{.,n} (T)$ 則具有 $N(\mu, \sigma^2)$ 常態分配。

首先說明，二項股票價格動態依循 式(3) (亦即是 式(2))，且二項股票價格動態相關性設定為 ρ，亦即是 $Cov (Z^X, Z^Y) = \rho$，其中 (Z^X, Z^Y) 符合二元標準常態、相關係數為 ρ 之隨機變數。股票價格幾何平均 $A_{.,n}(t)$ 為股票價格連乘且開 n 次方根，如下式表示：

$$A_{.,n} (t) = [S(t-n+1) S(t-n+2) S(t-n+3) \ldots S(t)]^{1/n} \tag{9}$$

其中 S(t) 為第 t 期股票價格。而且，前期與當期股票價格關係式在風險中立測度下為：

$$S(t) = S(t-1) \ e^{r - 1/2\, \theta^2 + \theta Z} \tag{10}$$

且令 R(t) 等於 $\exp (r - 1/2\, \theta^2 + \theta Z)$，由此改寫 式(9) 為 式(11)。

$$A_{.,n} (t) = S(t-n) [R(t-n+1)^n R(t-n+2)^{n-1} R(t-n+3)^{n-2} \ldots R(t)]^{1/n} \tag{11}$$

S(t-n) 再以 R(t) 疊代後表示，則將 式(11) 取對數且改寫成：

$$\ln A_{.,n} (t) = \ln S(0) + \sum_{i=1}^{t-n} \ln R_i + 1/n \sum_{i=t-n+1}^{t} (t+1-i) \ln R_i \tag{12}$$

且將 $R_i = \exp (r - 1/2\, \theta^2 + \theta Z_i)$ 代入，其中 Z_i 代表由時點 $i-1$ 至 時點 i 之標準常態隨機變數，將 式(12) 進一步改寫成：

$$\ln A_{.,n} (t) = \ln S(0) + (r - 1/2\, \theta^2) [(t - n) + 1/n \sum_{i=t-n+1}^{t} (t+1-i)]$$
$$+ \theta [\sum_{i=1}^{t-n} Z_i + 1/n \sum_{i=t-n+1}^{t} (t+1-i) Z_i] \tag{13}$$

由於，式(13) 第三項為常態隨機變數和為常態分配，所以 $\ln A_{.,n} (t)$ 服從常態分配，且經由計算求得 $\ln A_{.,n} (T)$ 平均數 μ 及變異數 σ^2 等參數，結果如下 (Turnbull and Wakeman 1991)：

$$\mu = \ln S(0) + (r - \theta^2/2) (T - n) + (r - \theta^2/2) (1 + n) / 2$$
$$\sigma^2 = \theta^2 (T - n) + \theta^2 (n + 1)(2n + 1)/(6n) \tag{14}$$

其中，T、n、以及 0 為期數。接續著，本文則由 式(13)，直接求取其共變異數 $Cov[\ln A_{x,n}(T), \ln A_{Y,n}(T)]$，主要概念要辨別是否相同時點隨機變數，在獨立性假設下不同時點隨機變數的共變異數為零，故而分成 n 等於 m、n 大於 m、以及 n 小於 m 等三種情形討論，所得結果如下式表示：

情形一 n 等於 m：

$$Cov[\ln A_{X,n}(T), \ln A_{Y,n}(T)] = \theta_x \theta_Y \rho \left[\sum_{i=1}^{T-n} 1 + 1/n^2 \sum_{i=T-n+1}^{T} (T+1-i)^2 \right]$$

情形二 n 大於 m：

$$Cov[\ln A_{X,n}(T), \ln A_{Y,n}(T)] = \theta_x \theta_Y \rho \left[\sum_{i=1}^{T-n} 1 + 1/n \sum_{i=T-n+1}^{T-m} (T+1-i) + 1/(nm) \sum_{i=T-m+1}^{T} (T+1-i)^2 \right];$$

情形三 n 小於 m：

$$Cov[\ln A_{X,n}(T), \ln A_{Y,n}(T)] = \theta_x \theta_Y \rho \left[\sum_{i=1}^{T-m} 1 + 1/m \sum_{i=T-m+1}^{T-n} (T+1-i) + 1/(mn) \sum_{i=T-n+1}^{T} (T+1-i)^2 \right]; \tag{15}$$

將上述推導結果整理如下，其中分別有 n 等於 m 、 n 大於 m 、以及 n 小於 m 等情況，$\hat{\rho}\sigma_X\sigma_Y$ 結果如下：

$$\begin{cases} \rho\theta_X\theta_Y[(T-n)+(n+1)(2n+1)/(6n)] & \text{if } n=m \\ \rho\theta_X\theta_Y[(T-n)+(n+m+1)(n-m)/(2n)+(m+1)(2m+1)/(6n)] & \text{if } n>m \\ \rho\theta_X\theta_Y[(T-m)+(m+n+1)(m-n)/(2m)+(n+1)(2n+1)/(6m)] & \text{if } n<m \end{cases} \tag{16}$$

目前，由以上推導可得 $[\ln A_{X,n}(T), \ln A_{Y,n}(T)]$ 服從二元常態分配，其參數為 $(\mu_X, \sigma_X, \mu_Y, \sigma_Y, \hat{\rho})$，亦即是 式(14) 與 式(16)。經由分配轉換後即可得 $[A_{X,n}(T), A_{Y,n}(T)]$ 二元對數常態分配，其聯合機率密度函數 $f(x, y)$ 如下式表示：

$$\frac{1}{2\pi xy\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\hat{\rho}^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\hat{\rho}^2\right)}\left[\left(\frac{\ln x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\hat{\rho}\left(\frac{\ln x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{\ln y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{\ln y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]\right\}$$

所以，歐式幾何移動平均交換選擇權價值在時點 0 可表示成：

$$\exp[-r(T-0)] \int_0^\infty \int_y^\infty (x-y) f(x,y)\, dx\, dy \tag{17}$$

然後，式(17) 即可採用數值積分法求得，亦即是求得歐式幾何移動平均交換選擇權價值。

(一) 數值積分法-蒙地卡羅 (Monte Carlo Integration)

將 式(17) 透過變數變換 $(u,v) = (\ln x, \ln y)$ 轉成二元常態積分式，且以蒙地卡羅積分法 (大數法則)，從二元常態隨機變數 (U, V) 取樣本數 k，以公式 $\exp\,[-r\,(T-0)\,]\left\{\sum_{i=1}^{k}\max\left(e^{u_k}-e^{v_k},0\right)\right\}/\,k$ 計算樣本平均數。

(二) 數值積分法-遞迴積分 (Iterated Integration)

將 式(17) 積分區域由類三角形變成類長方形，須再經變數變換處理。令 $p = y,\ q = x - y$。亦即積分式可改寫為：

$$\exp\left(-r\,(T-0)\right)\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} q\,\frac{1}{2\pi\,(q+p)\,p\,\sigma_X\,\sigma_Y\sqrt{1-\hat{\rho}^2}}\cdot$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\hat{\rho}^2)}\left[\left(\frac{\ln(q+p)-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2-2\hat{\rho}\left(\frac{\ln(q+p)-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{\ln p-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)+\left(\frac{\ln p-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]\right\}dp\,dq$$

如上所述，數值積分法是可以採用取樣方式 (Monte Carlo integration) 計算，雖然快速，但是其結果具有隨機性。亦可以採用不取樣方式積分，例如：遞迴數值積分法 (iterated integration) 來計算雙重積分，但是計算所需時間稍長。是故，為了解決數值積分法計算上的問題--隨機性結果或計算時間稍長問題，則須由下一節提供封閉解公式加以解決，概由於封閉解公式能夠快速、有效、以及精確評價該選擇權。

三、幾何移動平均交換選擇權之封閉解

本節主要依循 Margrabe (1978) 概念，Margrabe 評價所謂交換選擇權，其中二項股票價格動態為幾何布朗運動，且皆為對數常態分配，與本文選擇權設定二項股票移動平均價格動態相同，結果皆為對數常態分配。而且 Margrabe 封閉解公式僅考慮到期時第二項股票價格為計價之第一項股票價格動態波動度。因此，與本文選擇權特性比對後，式(17) 使用 Margrabe (1978) 封閉解公式計算，所得結果如下式表示：

$$C(\,S_X(0), S_Y(0); T, n, m, \rho, \theta_X, \theta_Y, r) =$$

$$\exp\,[-r\,(T-0)\,]\,E_0[A_{X,n}(T)]\,N(d_1) - \exp\,[-r\,(T-0)\,]\,E_0[A_{Y,m}(T)]\,N(d_2)$$

其中

$$E_0[A_{.,n}(T)] = \exp(\mu + 1/2\sigma^2)$$
$$\hat{\sigma}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\hat{\rho}\sigma_X\sigma_Y$$
$$d_1 = \frac{1}{\hat{\sigma}}\left\{\ln\frac{E\left[A_{X,n}(T)\right]}{E\left[A_{Y,n}(T)\right]} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right\}$$
$$d_2 = d_1 - \hat{\sigma} \tag{18}$$

式子中 σ_X^2 、σ_Y^2 、$E_0[A_{.,n}(T)]$ 由 式(14) 求得，而且 $\hat{\rho}$ 為 式(16)。

此處評價概念的關鍵在於考慮 $A_{X,n}(T)$、$A_{Y,m}(T)$ 的初始值為何? 此問題可由財務評價理論獲得解決，初始值是 $A_{X,n}(T)$、$A_{Y,m}(T)$ 資產報償現值，亦即在風險中立測度下為 $\exp[-r(T-0)]\,E_0[A_{X,n}(T)]$、及 $\exp[-r(T-0)]\,E_0[A_{Y,n}(T)]$。這樣 式(17) 與 式(18) 一致以 S(0) 為起點的評價公式。顯而易見，選擇權價值 $C(S_{X,n}(0), S_{Y,m}(0); T, n, m, \rho, \theta_X, \theta_Y, r)$ 如以 式(17) 與 式(18) 表示，其平均動態起始為 S(0), S(1), S(2), ⋯, S(n−1) 之平均數，因此不能表示為 $A_{X,n}(0)\,N(d_1) - A_{Y,m}(0)\,N(d_2)$，概由於在 $A_{.,n}(0)$ 式子中包含時點 0 以前的股價歷史資料，這與 式(17) 與 式(18) 所取的時間點不一致。

從 $A_{.,n}(T)$ 評價上「平賭過程」，將 $A_{.,n}(T)$ 視為獨立資產價格下依照財務資產價格動態以另一財務資產價格為計價情形時，符合平賭過程，亦即是 $\exp[-r(T-0)]\,E_0[A_{.,n}(T)]$ 相當於 $A_{.,n}(0)$，主要差別在於 $\exp[-r(T-0)]\,E_0[A_{.,n}(T)]$ 之移動平均動態起始為 S(0), S(1), S(2), ⋯, S(n−1) 之平均數，然而 $A_{.,n}(0)$ 之移動平均動態起始為 S(− n + 1), S(− n + 2), S(− n + 2), ⋯, S(−1), S(0) 之平均數，其中包括時點 0 以前的股價歷史資料，這與 式(17) 與 式(18) 其平均動態起始為 S(0), S(1), S(2), ⋯, S(n−1) 之平均數不一致。

另從 S(T) 評價上「平賭過程」: $\exp[-r(T-0)]\,E_0[A_{X,n}(T)]$ 應該相等於 S(0)。然而，造成原本等式不相等的原因在於： 平均因素造成資產動態與報償具有時間落差，差距僅是這期間的利息差異。所以，當平均天數不大（亦即是，期間利息差異不大）時，式(18) 可以進一步近似表示成為下式：

$$C(S_X(0), S_Y(0); T, n, m, \rho, \theta_X, \theta_Y, r) = S_X(0)N(d_1) - S_Y(0)\,N(d_2)$$

其中

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\hat{\rho}\sigma_X\sigma_Y$$
$$d_1 = \frac{1}{\hat{\sigma}}\left\{\ln\frac{S_X(0)}{S_Y(0)} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right\}$$
$$d_2 = d_1 - \hat{\sigma} \tag{19}$$

最後，本文為了精準表示該選擇權評價公式，幾何移動平均交換選擇權之封閉解公式依然採用 式(18) 以期望值公式表示。但是，值得注意：當搭配 式(14)、式(16)，則 式(18) 實為封閉解、簡單計算公式。

四、算術移動平均交換選擇權之評價

本節介紹算術移動平均交換選擇權，其報償依 式(1)，其平均方式採用股票算術移動平均價格，如下式表示：

$$A_{X,n}(t) = 1/n\ [\ S^X(t-n+1) + S^X(t-n+2) + S^X(t-n+3) + \ldots + S^X(t)\ ]$$
$$A_{Y,m}(t) = 1/m\ [\ S^Y(t-m+1) + S^Y(t-m+2) + S^Y(t-m+3) + \ldots + S^Y(t)\ ] \qquad (20)$$

其中 $A_{X,n}(t)$ 為 X 股票 n 日算術移動平均價格、$A_{Y,m}(t)$ 為 Y 股票 m 日算術移動平均價格。

本文將 $C(\ S_X(t), S_Y(t); T, n, m, \rho, \theta_X, \theta_Y, r)$ 代表為歐式選擇權價值，且其報償依算術移動平均決定。該選擇權在 T 時點到期，n 為 X 股票價格平均日數、m 為 Y 股票價格平均日數、以及 r 為無風險利率。到期時，選擇權的價值為：

$$C(\ A_{X,n}(T), A_{Y,m}(T); T, n, m\ ) = \max\ [\ A_{x,n}(T) - A_{Y,m}(T), 0\ ] \qquad (21)$$

如同本章第二節所述，歐式選擇權價值在時點 0 可表示成：

$$\exp\ [-r\ (T-0)\ ]\ \int_0^\infty \int_y^\infty (x-y)\ g(x,y)\ dx\ dy \qquad (22)$$

如何決定適當風險中立測度下機率密度函數 $g(x, y)$ 為本節重點。亦即是，須求算 $[\ A_{X,n}(T), A_{Y,m}(T)\ ]$ 在風險中立測度下聯合機率分配。眾所熟知，對數常態隨機變數相加總並非為對數常態隨機變數 (Kemna and Vorst, 1990)。故而，本文僅考慮其近似分配，用以計算選擇權價值。

Levy (1992) 指出對數常態隨機變數相加總分配可由其對應之對數常態分配近似。所以，本文考慮 $\ln A_{.,n}(T)$ 動差母函數且以常態分配近似，其參數為 (μ, σ^2)，如下式表示：

$$E[\ \exp\ (\ k \cdot \ln A_{.,n}(T)\ )\ ] \fallingdotseq \exp\ [\ \mu\ k + 1/2\ \sigma^2\ k^2] \qquad (23)$$

k 以值 1、2 代入 式(23) 可得出兩個方程式，以決定參數 (μ, σ^2) 以 式(24) 表示。

$$\mu = 2\ln E[\ A_{.,n}(T)\ ] - 1/2\ln E[\ A_{.,n}(T)^2\ ]$$

$$\sigma^2 = \ln E[\, A_{\cdot,n}(T)^2 \,] - 2 \ln E[\, A_{\cdot,n}(T) \,] \tag{24}$$

接續著，「二項資產價格分別求取算術平均的相關係數」即為求得此選擇權價值的重要關鍵。然而，直接透過相似於求取「二項資產價格分別求取幾何平均的相關係數」的方法，有些許困難。所以，本文另外採用探討「二項資產價格分別求取算術平均的相關係數」與「二項資產價格分別求取幾何平均的相關係數」兩者關係來說明。當兩者相關係數相近時，本文則以二項資產價格分別求取幾何平均之相關係數替換二項資產價格分別求取算術平均的相關係數。

首先，從動態設定上直接觀察：$(S^X(t-n+1), S^X(t-n+2), S^X(t-n+3), \ldots, S^X(t))$ 是不同時點，但遵行相同 X 股票價格動態，另外，$(S^Y(t-n+1), S^Y(t-n+2), S^Y(t-n+3), \ldots, S^Y(t))$ 是不同時點，但遵行相同 Y 股票價格動態，而且 (X, Y) 動態關係皆由遵行相同之相關性結構，$dZ^X\, dZ^Y$ 等於 $\rho\, dt$。因而，不同平均方式，只是將相同資料 $[(S^X(t-n+1), S^X(t-n+2), S^X(t-n+3), \ldots, S^X(t))$，$(S^Y(t-m+1), S^Y(t-m+2), S^Y(t-m+3), \ldots, S^Y(t))]$ 對應到，譬如說，算術平均 $[1/n\, (S^X(t-n+1) + S^X(t-n+2) + S^X(t-n+3) + \ldots + S^X(t))$，$1/m\, (S^Y(t-m+1) + S^Y(t-m+2) + S^Y(t-m+3) + \ldots + S^Y(t))]$、或是幾何平均 $(\, [\, S^X(t-n+1)\, S^X(t-n+2)\, S^X(t-n+3) \ldots S^X(t)\,]^{1/n}, [\, S^Y(t-m+1)\, S^Y(t-m+2)\, S^Y(t-m+3) \ldots S^Y(t)\,]^{1/m}\,)$，而且對應的算術平均值與幾何平均值差別在於，數值大小不同，但是同為算術或幾何平均之二序列 X、Y 的相對位置所反應之相關性結構並未改變。是故，「二項資產價格分別求取算術平均的相關係數」與「二項資產價格分別求取幾何平均的相關係數」理應相當接近。

眾所熟知，「算術平均報酬率」等於「幾何平均報酬率」加上波動度調整。在 式(2) 資產價格動態設定下：幾何平均報酬率相等於算術平均報酬率減去 1/2 乘於報酬率之波動度平方。當報酬率之波動度為常數時，則「二項資產報酬率分別求取算術平均的相關係數」與「二項資產報酬率分別求取幾何平均的相關係數」相同。就橫斷面而言，在相同的設定下，幾何平均價格相等於算術平均價格乘於指數函數其冪次為負的 1/2 乘於報酬率期間波動度的平方。當報酬率之波動度為常數時，則「二項資產價格分別求取算術平均的相關係數」與「二項資產價格分別求取幾何平均的相關係數」相同。然而，本文所涉及的「移動平均」 為時間面價格平均值，此處則利用泰勒展開式加以說明。原因在於：不論橫斷面或時間面的平均值，凡牽涉變量之間的關係，皆可用泰勒展開式加以說明 (不須模型假設)。首先，將 式(20) 算術平均改寫成：

$$A^A_{\cdot,n}(t) = 1/n\, S(t-n)\, [\, (1+R_1(t-n+1)) + (1+R_2(t-n+2)) + \ldots + (1+R_n(t))\,] \tag{25}$$

而且將 式(6) 幾何平均改寫成：

$$A^{G}_{.,n}(t) = S(t-n)\,[\,(1+R_1(t-n+1))\,(1+R_2(t-n+2))\,\ldots\,(1+R_n(t))\,]^{1/n} \quad (26)$$

其中，$R_i(t-n+i) = S(t-n+i) / S(t-n) - 1$，是為「 t–n 期至 t–n+i 期之持有期間報酬率」。

接續著，將不同持有期間的持有期間報酬率之幾何平均數 $[\,(1+R_1(t-n+1))\,(1+R_2(t-n+2))\,\ldots\,(1+R_n(t))\,]^{1/n}$ 在 ($R_1(t-n+1), R_2(t-n+2), \ldots, R_n(t)$) 為零點 (0, 0, …, 0) 時泰勒展開，且由於持有期間報酬率在本文設定上不會超過一年，因此泰勒展開到二階就足以近似原先 「不同持有期間的持有期間報酬率之幾何平均數」。泰勒展開式如下：

$$[\,(1+R_1(t-n+1))\,(1+R_2(t-n+2))\,\ldots\,(1+R_n(t))\,]^{1/n} = 1 + \bar{R} - 1/2\ S_R^2$$

其中

$$\bar{R} = 1/n\,[\,R_1(t-n+1) + R_2(t-n+2) + \ldots + R_n(t)]$$

$$S_R^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(R_i - \bar{R}\right)^2 \quad (27)$$

$\bar{R}$ 為以平均開始日的前一天衡量之 n 筆不同持有期間之持有期間報酬率(亦即是，從平均開始日的前一天起算，一天、二天、⋯ 、以及 n 天持有期間報酬率) 的平均值，而且 S_R^2 為這 n 筆不同持有期間之持有期間報酬率的變異數。由此可得，資產價格幾何移動平均與資產價格算術移動平均之關係式為：

$$A^{G}_{.,n}(t) = S(t-n)\,[\,1 + \bar{R} - 1/2\ S_R^2\,] = A^{A}_{.,n}(t) - 1/2\ S(t-n)\ S_R^2 \quad (28)$$

亦即是，資產價格幾何移動平均 = 資產價格算術移動平均 – 1/2 * 平均開始日前一天的資產價格 * 「n 筆不同持有期間之持有期間報酬率的變異數」，且二項資產價格分別求取幾何移動平均的共變異數：

$$\mathrm{Cov}[A^{G}_{X,n}(t), A^{G}_{Y,n}(t)] =$$
$$\mathrm{Cov}\,[A^{A}_{X,n}(t) - 1/2\ S^X(t-n)\left(S_R^X\right)^2,\ A^{A}_{Y,n}(t) - 1/2\ S^Y(t-n)\left(S_R^Y\right)^2\,] \quad (29)$$

當不同持有期間之持有期間報酬率的變異數相當穩定時：

$$\mathrm{Cov}[1/2\ S^X(t-n)\left(S_R^X\right)^2, 1/2\ S^Y(t-n)\left(S_R^Y\right)^2\,] = 1/4\left(S_R^X\right)^2\left(S_R^Y\right)^2\mathrm{Cov}[S^X(t-n), S^Y(t-n)]$$
$$\mathrm{Cov}\,[A^{A}_{X,n}(t), 1/2\ S^Y(t-n)\left(S_R^Y\right)^2\,] = 1/2\left(S_R^Y\right)^2\mathrm{Cov}\,[A^{A}_{X,n}(t), S^Y(t-n)]$$
$$\mathrm{Cov}\,[1/2\ S^X(t-n)\left(S_R^X\right)^2, A^{A}_{Y,n}(t)] = 1/2\left(S_R^X\right)^2\mathrm{Cov}\,[S^X(t-n), A^{A}_{Y,n}(t)] \quad (30)$$

而且，從 $Cov\ [A^{A}_{X,n}(t), S^{Y}(t-n)]$ 觀察，當中 $A^{A}_{X,n}(t)$ 屬於 X 資產價格在 t–n+1、t–n+2、⋯、t 等時點平均值，且 $S^{Y}(t-n)$ 屬於 Y 資產價格在 t–n 時點的隨機變數，亦即是 $A^{A}_{X,n}(t)$ 與 $S^{Y}(t-n)$ 為時間未重疊之不同資產價格的隨機變數，在本文模型設定下即具有獨立性，因此，$Cov\ [A^{A}_{X,n}(t), S^{Y}(t-n)]$ 共變異數為零。基於相同理由，$Cov\ [S^{X}(t-n), A^{A}_{Y,n}(t)]$ 共變異數為零。所以，二項資產價格分別求取幾何移動平均的共變異數符合下列式子：

$$\begin{aligned} Cov\ [A^{G}_{X,n}(t), A^{G}_{Y,n}(t)] &= Cov\ [A^{A}_{X,n}(t), A^{A}_{Y,n}(t)] \\ &\quad + 1/4\ Cov\ [S^{X}(t-n), S^{Y}(t-n)]\ \left(S^{X}_{R}\right)^{2}\left(S^{Y}_{R}\right)^{2} \end{aligned} \tag{31}$$

接續的觀察此式，$Cov[A^{G}_{X,n}(t), A^{G}_{Y,n}(t)]$、$Cov\ [A^{A}_{X,n}(t), A^{A}_{Y,n}(t)]$、以及 $Cov\ [S^{X}(t-n), S^{Y}(t-n)]$ 皆為價格上的共變異，然而，$\left(S^{X}_{R}\right)^{2}$ 及 $\left(S^{Y}_{R}\right)^{2}$ 為不同持有期間之持有期間報酬率的變異數，亦即是： 一者為價格、另一者為報酬率，兩者數值差異極大。換句話說，在共變異數 $Cov[A^{G}_{X,n}(t), A^{G}_{Y,n}(t)]$ 的式子中，$1/4\ Cov\ [S^{X}(t-n), S^{Y}(t-n)]\ \left(S^{X}_{R}\right)^{2}\left(S^{Y}_{R}\right)^{2}$ 太小，可以忽略不計 (亦即是，$\left(S^{X}_{R}\right)^{2}$ 乘上 $\left(S^{Y}_{R}\right)^{2}$ 的值相對上太小了。特別在風險中立的動態下，其報酬率為無風險報酬率，更是可以忽略不計)。因此，當不同持有期間之持有期間報酬率的變異數相當穩定時：

$$Cov[A^{G}_{X,n}(t), A^{G}_{Y,n}(t)] \approx Cov\ [A^{A}_{X,n}(t), A^{A}_{Y,n}(t)] \tag{32}$$

亦即是當不同持有期間之持有期間報酬率的變異數相當穩定時，「二項資產價格分別求取算術移動平均的共變異數」與「二項資產價格分別求取幾何移動平均的共變異數」約略相等，兩者差異極小。

最後，由於這樣的結果，「二項資產價格分別求取幾何移動平均的相關係數」與「二項資產價格分別求取算術移動平均的相關係數」則滿足以下列式子：

$$Corr[A^{G}_{X,n}(t), A^{G}_{Y,n}(t)] \approx Corr\ [A^{A}_{X,n}(t), A^{A}_{Y,n}(t)] \tag{33}$$

亦即是當不同持有期間之持有期間報酬率的變異數相當穩定時，「二項資產價格分別求取算術移動平均的相關係數」與「二項資產價格分別求取幾何移動平均的相關係數」相當接近，驗證從動態設定上直接觀察的結論。

五、算術移動平均交換選擇權價值之演算方法

算術移動平均交換選擇權評價 式(21)、式(22) 與幾何移動平均交換選擇權評價相類似，僅須採用不同參數 $(\mu_X, \sigma_X, \mu_Y, \sigma_Y, \hat{\rho})$，其計算相關參數的演

算法為本節說明重點。

關於「算術移動平均的相關係數」$\hat{\rho}$ 方面： 在本文模型設定下，則採用「幾何移動平均的相關係數」式(16) 公式計算，概因當不同持有期間之持有期間報酬率的變異數相當穩定時「幾何移動平均的相關係數」與「算術移動平均的相關係數」相當接近，如同本章第四節說明。

接續著，依 Levy (1992) 所提近似概念決定相關參數 (μ, σ^2)，以下列式子表示：

$$\mu = 2 \ln E[A_{\cdot,n} (T)] - 1/2 \ln E[A_{\cdot,n} (T)^2]$$
$$\sigma^2 = \ln E[A_{\cdot,n} (T)^2] - 2 \ln E[A_{\cdot,n} (T)] \tag{34}$$

上式中須估計算術移動平均的一階動差 $E[A_{\cdot,n} (T)]$、及算術移動平均的二階動差 $E[A_{\cdot,n} (T)^2]$。本文依 Turnbull and Wakeman (1991) 疊代方法求得算術移動平均一階 $E[A_{\cdot,n} (T)]$、二階動差 $E[A_{\cdot,n} (T)^2]$。以下列式子表示：

$$E(A_{\cdot,n}(T)) = (1 / n) S(0) \; e^{(T-n+1)r} \; E(L(i+1))$$

$$E(A_{\cdot,n}(T)^2) = (1 / n^2) S(0)^2 \; e^{(T-n+1)(2r+\theta^2)} \; E(L(i+1)^2)$$

$$E[L(i+j)] = 1 + e^r E[L(i+j+1)] \quad j=n-1, n-2, \ldots, 1$$

$$E[L(i+j)^2] = 1 + 2 e^r E[L(i+j+1)] + e^{2r+\theta^2} E[L(i+j+1)^2], j=n-1, n-2, \ldots, 1$$

$$E[L(i+n)] = 1, E[L(i+n)^2] = 1 \tag{35}$$

由 式(16)、式(34)、及 式(35) 可求得算術移動平均交換選擇權之相關參數 ($\mu_X, \sigma_X, \mu_Y, \sigma_Y, \hat{\rho}$)。亦即是，除了蒙地卡羅評價法外，算術移動平均交換選擇權之評價方法： (1) 數值積分法－蒙地卡羅 (Monte Carlo integration)，如 本章第二節(一)小節 所述、(2) 數值積分法－遞迴積分 (iterated integration)，如本章第二節(二)小節 所述、(3) Margrabe (1978) 封閉解法，如 式(18) 所述 (此處所採用近似分配與幾何移動平均的相關係數等近似概念，故而所推導的封閉解，本文亦稱為解析封閉解)。

最後，總結本章關於選擇權評價之相關內容。在本文模型設定下，除了蒙地卡羅評價法外，數值積分法就是歐式算術或幾何移動平均交換選擇權的最常見且一般評價方法。而且，本文依財務理論，說明數值積分評價方法即為 Margrabe (1978) 封閉解法，但須調整其公式。尤有甚者，幾何移動平均交換選擇權所需的相關參數 ($\mu_X, \sigma_X, \mu_Y, \sigma_Y, \hat{\rho}$)，特別是相關係數，亦可表示成簡單公式解。因此，幾何移動平均交換選擇權是一個簡單的計算公式。然而，算

術移動平均交換選擇權的相關參數 ($\mu_X, \sigma_X, \mu_Y, \sigma_Y, \hat{\rho}$)，除了其相關係數與幾何移動平均交換選擇權相同 (本章第四節) 外，其平均數與波動度 (μ, σ) 則採用疊代法求解。此處所謂疊代法只須簡單迴圈計算，所以算術移動平均交換選擇權亦是一個簡單的計算方法。接續著，本文為了檢驗所推導評價方法是否正確，則採用蒙地卡羅法評價法加以驗證。所謂蒙地卡羅法評價法： 模擬風險中立的二項資產價格動態，依不同方式平均，之後計算選擇權報償、以無風險利率折現選擇權報償，最後求取平均值，亦即是該選擇權的價值。所以，本文亦提供幾何移動平均交換選擇權以及算術移動平均交換選擇權之蒙地卡羅評價法的結果，以利相互比較驗證。

六、移動平均交換選擇權之風險衡量

本節提供風險衡量，例如，Delta, Gamma 等，讓市場人士運用該風險衡量於該選擇權風險管理及其投資組合避險等工作。其他風險參數，其所使用方法相同不再贅述。參照本章前面說明，移動平均交換選擇權在評價上具有 (解析) 封閉解公式，而且算術、幾何兩者選擇權評價公式僅只有平均數 μ 及波動度 σ 不相同。值得注意，兩者選擇權的評價公式皆為簡單計算公式。是故，兩者選擇權的相關風險衡量不論是算術移動平均交換選擇權、亦或是幾何移動平均交換選擇權，只須簡單推導 (類以於 Margrabe 交換選擇權) 即可求得 Delta, Gamma 等風險衡量的公式。

移動平均交換選擇權對於 X 股票 Delta 風險係數，表示如下：

$$\exp(-r(T-0))\, E_0[A_{X,n}(T)]\, N(d_1) / S^X(0) \tag{36}$$

移動平均交換選擇權對於 X 股票 Gamma 風險係數，表示如下：

$$\exp(-r(T-0))\, E_0[A_{X,n}(T)]\, n(d_1) / (S^X(0)^2\ \hat{\sigma}) \tag{37}$$

移動平均交換選擇權對於 Y 股票 Delta 風險係數，表示如下：

$$-\exp(-r(T-0))\, E_0[A_{Y,m}(T)]\, N(d_2) / S^Y(0) \tag{38}$$

移動平均交換選擇權對於 Y 股票 Gamma 風險係數，表示如下：

$$\exp(-r(T-0))\, E_0[A_{Y,m}(T)]\, n(d_2) / (S^Y(0)^2\ \hat{\sigma}) \tag{39}$$

其中 N(.) 為標準常態累積分配函數、n(.) 為標準常態機率密度函數。值得注意： 關於幾何移動平均交換選擇權的風險衡量如 Delta, Gamma 等，則為 式(36) -- 式(39) (封閉解公式)，且搭配 式(14)、式(16)、以及 式(18) 等計算相

關參數；關於算術移動平均交換選擇權的風險衡量如 Delta, Gamma 等，則為式(36) -- 式(39) (解析封閉解公式)，且搭配 式(34)、式(35)、式(16)、以及式(18) 等計算相關參數。如同選擇權的評價公式一樣，這些公式皆為簡單計算公式。

肆·模擬及數值分析

本章運用第參章之評價方法，進行移動平均交換選擇權評價及其分析，主要對象為歐式算術、幾何移動平均交換選擇權，分別提供數值積分法 (numerical integration)、(解析) 封閉解法 (closed-form solution) 等數值分析結果，並與蒙地卡羅法 (Monte Carlo simulation) 模擬結果進行比較。以比較所得之結果說明：本文所建議數值積分法、(解析) 封閉解法等，能夠快速、有效、以及精確進行評價。

一、模型參數設定

回顧本文模型設定：當期股票價格與前期股票價格的關係如 式(4)、式(5) 所描述時 $S(t)$ 相等於 $S(t-1)\ R(t)$，其中 $R(t)$ 為股票價格毛報酬率 (gross rate of return)，而且在風險中立下 $R(t)$ 等於 $e^{r - 1/2\,\theta^2 + \theta Z}$，其中 Z 為時點 t 標準常態隨機變數。 Z 的特性為： 跨期間兩個隨機變數具有獨立性。當有二項 (X, Y) 股票價格服從風險中立動態時，設定同一期二元標準常態隨機變數 (Z^X, Z^Y) 之相關係數為 ρ。以股票資產為例，設定模型相關參數如表一。

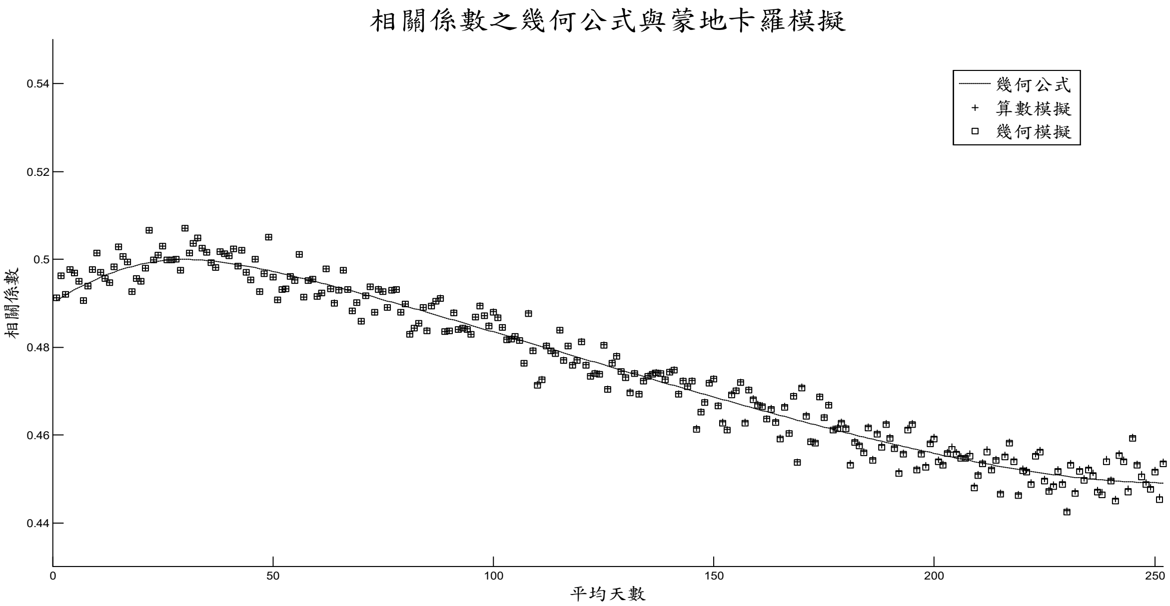
二、幾何移動平均與算術移動平均相關係數之比較

本節主要以蒙地卡羅法模擬結果說明二項資產算術、幾何移動平均之相關係數非常接近。當二項資產算術、幾何移動平均之相關係數非常接近 (第參章第四節) 時，依模型設定所推導的幾何移動平均相關係數公式，可運用於算術移動平均交換選擇權的評價。為了驗證第參章第四節推導結論：二項資產幾何移動平均之相關係數與算術移動平均之相關係數非常接近。本節以 表一為基本參數設定，蒙地卡羅法之模擬路徑次數 50,000，將其結果以 圖一 表示。

表一 評價模型之基本相關參數設定

參數	數值	說明
$S^X(0)$	50	時點 0 之 X 股票價格
$S^Y(0)$	50	時點 0 之 Y 股票價格
term	1	到期期限 (單位： 年)
r	0.05	無風險利率 (單位： 年)
sigmaX	0.20	X 股票報酬率標準差 (單位： 年)
sigmaY	0.20	Y 股票報酬率標準差 (單位： 年)
ρ	0.50	一期之相關係數
n	30	X 股票價格之移動平均日數
m	30	Y 股票價格之移動平均日數
T	252	距到期日之日數
paths	50,000	蒙地卡羅法之模擬路徑次數[3]
cases	50,000	數值積分法之取樣之樣本數
repeats	100	蒙地卡羅、數值積分法之重複實驗次數

參數說明： 一期 (或一日) 之期限為 Δt 亦即是 term / T，sigmaX、 sigmaY 為年化 X、Y 股票報酬率標準差，與本文之一期 (或一日) X、Y 股票報酬率標準差 θ_X、 θ_Y 其關係為 θ_X 等於 $\sqrt{\Delta t}$ 乘於 sigmaX 且 θ_Y 等於 $\sqrt{\Delta t}$ 乘於 sigmaY。



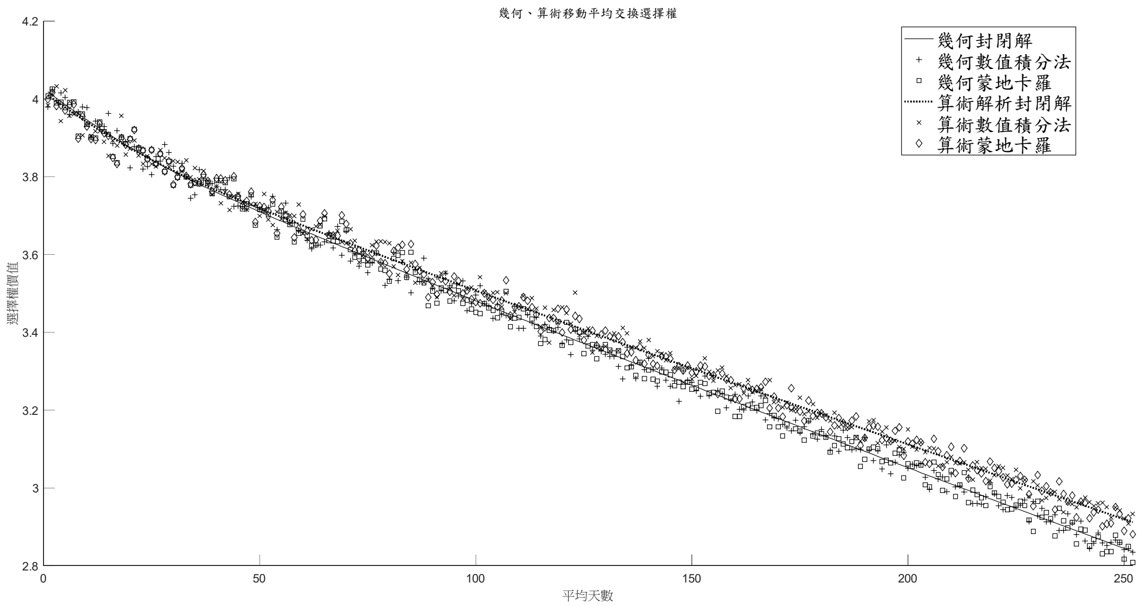
圖一 幾何、算術蒙地卡羅模擬相關係數與幾何公式相關係數之比較

[3] 計算時本文以常態分配為取樣分配，故而路徑取 50,000 次進行實驗即足夠，如進行標準差分析，還要額外 100 次重覆實驗，重複次數多之目的在於縮小估計信賴區間、提高精確度。簡而言之，對某組參數而言，本文使用蒙地卡羅之總模擬次數為 5,000,000 次，實屬大量之模擬。

由 圖一 所示 (幾何) 公式與算術模擬、幾何模擬有些許微小差異，譬如說：在算術平均部分，差異絕對值平均為 0.00277、差異絕對值標準差為 0.00203；幾何平均部份，差異絕對值平均為 0.00276、差異絕對值標準差為 0.00204。但更重要的是：圖一 上的算術模擬與幾何模擬是蒙地卡羅法所計算的相關係數。在圖中，在平均天數較短時，小方塊中的加號位於中央，代表著算術模擬相關係數等於幾何模擬相關係數；當在平均天數較長時，加號在小方塊中僅稍微偏離，但仍在小方塊之中 (譬如說，算術、幾何移動平均之相關係數差異絕對值平均大約為 $1.83354 \cdot 10^{-4}$。尤有甚者，最大差異絕對值為 $7.31124 \cdot 10^{-4}$)，這代表可以採用相近的二項資產幾何移動平均相關係數替換二項資產算術移動平均相關係數。尤有甚者，二項資產幾何移動平均相關係數公式的正確性亦可由蒙地卡羅法的隨機結果加以驗證，理由在於：蒙地卡羅法的隨機結果在幾何公式結果之上與下隨機呈現。因此，本節驗證了算術、幾何平均相關係數非常靠近。而且，幾何移動平均之相關係數公式的精確性可運用於算術移動平均交換選擇權的評價及風險衡量等問題上。

三、不同評價方法之比較

本節主要比較歐式算術、幾何移動平均交換選擇權之不同評價方法，譬如說：數值積分法、(解析) 封閉解法、以及蒙地卡羅法等。依 表一 相關參數，蒙地卡羅法之模擬路徑次數為 50,000 次，讓 X 股票價格之移動平均日數變動，並且運用 (解析) 封閉解法、數值積分法及蒙地卡羅法等評價歐式算術、幾何移動平均交換選擇權，其結果以 圖二 表示。



圖二 幾何、算術移動平均交換選擇權不同方法評價

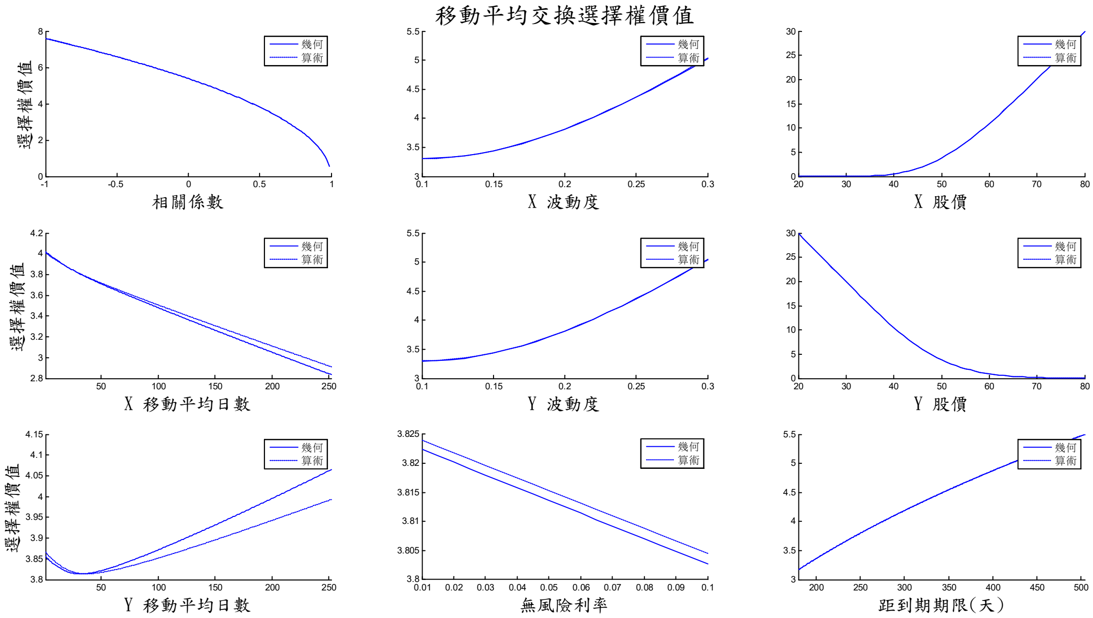
由 圖二 所示，幾何、算術移動平均交換選擇權不同方法評價，諸如：幾何封閉解法、算術解析封閉解法、數值積分法 (Monte Carlo integration) 及蒙地卡羅法等有一致性結果。亦即是，本文建議評價模式得到模擬結果支持。尤有甚者，本文建議之 (解析) 封閉解，就如同 Black and Myron (1973) 與 Margrabe (1978) 等封閉解，在計算上一樣快速、精確。

四、比較靜態分析法

本節簡單說明各項參數變動對移動平均交換選擇權價值的影響，如 圖三；對其 Delta 影響，如 附圖一；對其 Gamma 影響，如 附圖二。一般而言，波動性對選擇權具有深遠影響。「交換」涉及二項標的股票之間漲跌關係，故股票間相關性亦決定交換選擇權價值。其中，「平均」同時影響到期時股票平均價格波動性及相互間相關性。故而，移動平均交換選擇權評價模型的重要參數為：移動平均日數 (n, m)、二項股票價格動態所設定的相關係數 ρ、股票價格波動性 (sigmaX, sigmaY)。其他變數，諸如： 到期期限 term、無風險利率 r、及初始股票價格等，對移動平均交換選擇權價值的影響，與交換選擇權

相同，不再贅述。

相關性愈高，移動平均交換選擇權價值愈小；相關係數對於移動平均交換擇權之於 X 股票 Delta 風險係數影響為負向影響；相關係數對於移動平均交換選擇權之於 X 股票 Gamma 風險係數影響為正向影響；相關係數對於移動平均交換選擇權之於 Y 股票 Delta 風險係數影響為負向影響；相關係數對於移動平均交換選擇權之於 Y 股票Gamma 風險係數影響為正向影響。另外，移動平均日數則透過總合變異數 $\hat{\sigma}$ 及平均數 $E_0(A_{\cdot,n}(T))$ 等影響，方向未定。不過，在本例中移動平均交換選擇權價值其影響為： X 移動平均日數負向影響，Y 移動平均日數則剛開始負向，之後轉為正向影響。



圖三 移動平均交換選擇權價值的影響因素分析

五、評價方法穩健性分析

本節考慮各種情境，便於分析不同評價方法之穩健性。然而，蒙地卡羅法計算所需時間長。所以，此處將 表一 模擬路徑次數降為 500 次，且重覆試驗 100 次。結果列示於附錄—附表二 -- 附表十。對比不同附表間代表著不同之「資產波動度之影響」，附表內有著不同的「資產相關係數的影響」、「X 及 Y 移動平均日數之影響」。附表二 -- 附表四 為移動平均交換選擇權參數變動分析；附表五 -- 附表七 為移動平均交換選擇權對 X 股票風險係數

之參數變動分析；附表八 -- 附表十 為移動平均交換選擇權對 Y 股票風險係數之參數變動分析。在各種情境分析下固定其他參數不變時即成為比較靜態分析。為了避免重覆贅述，本節論述著重於：本文所推導的幾何移動平均交換選擇權封閉解正確性；算術移動平均交換選擇權演算法具有穩健性。

附表所列：第一、幾何移動平均交換選擇權及算術移動平均交換選擇權等兩項衍生商品；第二、「幾何封閉解」與「算術解析封閉解」、蒙地卡羅、以及數值積分等評價方法。此處所謂的蒙地卡羅法，就是在風險中立動態下在模擬各種路徑後依商品的報償折現後平均加總的價值，在評價上簡單、直覺、以及正確。所以，蒙地卡羅評價法為其它評價方法比較基礎，但是該評價方法的缺點為：計算時間長、所得評價結果具有隨機性。數值積分法則以風險中立動態設定下，推導 $[A_{X,n}(T), A_{Y,n}(T)]$ 聯合機率密度函數，採用蒙地卡羅積分法計算結果。此處，蒙地卡羅法與數值積分法的關係在於：如若風險中立動態設定下所推導的 $[A_{X,n}(T), A_{Y,n}(T)]$ 聯合機率密度函數為正確情況時，則兩種評價方法所計算之結果相同。數值積分法相較於蒙地卡羅法較為快速、省時。另外，(解析) 封閉解法與數值積分法的關係在於：(解析) 封閉解法須再進一步運用財務評價理論及平賭過程解決評價上初始值問題，且在比對交換選擇權封閉解後得出結果。在理論推導上，幾何移動平均交換選擇權評價公式與算術移動平均交換選擇權評價演算法的差別在於：一、幾何移動平均交換選擇權評價公式：無近似分配問題且相關係數直接由本文模式設定推導得出結果。本文稱之為封閉解 (代表真實解)。二、算術移動平均交換選擇權評價公式：有近似分配問題且採用二項資產幾何移動平均之相關係數公式近似其相關係數。本文稱之為解析封閉解 (代表近似解)。

由 附表二，其結果顯示：公式欄 F 的值與蒙地卡羅欄 SIM 的平均值相近，其誤差在一個標準誤之內，顯示不論是幾何移動平均型態或是算術移動平均型態的評價皆是正確的。尤有甚者，幾何平均型態與算術平均型態在此處所展現的誤差型態相同。所以，算術移動平均交換選擇權評價的分配近似是妥當的。公式欄 F 的值與積分法欄 INT 的平均值相近，其誤差在一個標準誤之內，亦顯示初始值的論述正確。再者，其他附表之結果相同。事實上，在 圖二 所示：當提高模擬次數下亦有相同的結果。然而，此處透過大量的參數變動情形，其結果再次驗證：幾何移動平均交換選擇權封閉解正確性及算術移動平均交換選擇權演算法具有穩健性。

伍·結論與建議

股票移動平均價格可視為大量股票出售或分開時段求現時投資組合之平均價值，亦或大量股票買進或分開時段佈局時投資組合之建構成本。因此，為了符合實際交易型態下資產交換價值，計算交換價值則應採用資產移動平均價格。然而，在此情形下所伴隨而生且提供資產交換交易時之避險工具 -- 移動平均交換選擇權，以股票資產為例，其報償為二項股票移動平均價格差值且與零比較之孰大者。

本文建議歐式算術、幾何移動平均交換選擇權之 (解析) 封閉解，能夠快速、精確計算該選擇權價值，且得到蒙地卡羅法及數值積分法等模擬及數值分析結果支持。尤有甚者，本文變動相當多參數，顯示理論推導之 (解析) 封閉解法與蒙地卡羅法及數值積分法有一致性結果。就計算方面，蒙地卡羅法計算耗力費時、所計算結果具有隨機性等缺點。數值積分法雖然提高了計算速度，但是由於本文以取樣方式進行積分，所以其結果一樣具有隨機性，無法進一步探討風險係數衡量，除非取樣次數提高，精確度再提高，才有可能達成。

最後，本文建議 (解析) 封閉解公式將上述問題，諸如：計算耗力費時、且所求得選擇權價值具有隨機性等，加以解決。更進一步說，本文所建議 (解析) 封閉解公式可明確了解相關參數變動對選擇權價值影響。亦即是，(解析) 封閉解公式可進一步推導出歐式算術、幾何移動平均交換選擇權 Delta、Gamma,…等風險係數之 (解析) 封閉解公式。而且，這些公式能夠精確且快速計算這些風險係數，以供市場人士運用於該選擇權風險管理及其投資組合避險等工作。

附表二 移動平均交換選擇權參數變動分析－(0.2, 0.2)

		Geometric					Arithmic				
ρ	(n, m)	F	SIM		INT		F	SIM		INT	
			μ	S.E.	μ	S.E.		μ	S.E.	M	S.E.
-0.5	20, 20	6.686	6.737	0.453	6.686	0.045	6.687	6.739	0.453	6.688	0.048
	30	6.661	6.674	0.465	6.656	0.046	6.660	6.673	0.466	6.657	0.042
	40	6.634	6.635	0.439	6.635	0.041	6.630	6.631	0.439	6.627	0.042
	30, 20	6.605	6.584	0.454	6.605	0.043	6.611	6.589	0.454	6.602	0.044
	30	6.585	6.603	0.424	6.580	0.044	6.588	6.606	0.424	6.590	0.043
	40	6.561	6.484	0.438	6.564	0.044	6.561	6.484	0.438	6.559	0.043
	40, 20	6.521	6.518	0.446	6.521	0.045	6.531	6.527	0.447	6.531	0.040
	30	6.505	6.499	0.393	6.512	0.048	6.511	6.506	0.393	6.516	0.042
	40	6.484	6.426	0.364	6.477	0.043	6.488	6.430	0.364	6.498	0.043
0	20, 20	5.467	5.417	0.372	5.462	0.037	5.469	5.419	0.372	5.470	0.042
	30	5.454	5.456	0.380	5.453	0.036	5.453	5.454	0.380	5.451	0.040
	40	5.441	5.516	0.395	5.440	0.035	5.437	5.511	0.395	5.435	0.036
	30, 20	5.398	5.394	0.347	5.397	0.034	5.404	5.399	0.347	5.397	0.042
	30	5.385	5.406	0.408	5.382	0.034	5.387	5.408	0.408	5.385	0.034
	40	5.372	5.439	0.349	5.368	0.034	5.371	5.438	0.349	5.371	0.031
	40, 20	5.329	5.342	0.380	5.323	0.033	5.338	5.351	0.380	5.340	0.037
	30	5.316	5.284	0.345	5.313	0.037	5.322	5.290	0.345	5.324	0.039
	40	5.302	5.359	0.337	5.303	0.035	5.305	5.363	0.337	5.310	0.036
0.5	20, 20	3.872	3.884	0.274	3.877	0.029	3.873	3.885	0.274	3.873	0.027
	30	3.876	3.894	0.268	3.877	0.025	3.874	3.892	0.268	3.874	0.027
	40	3.884	3.906	0.203	3.885	0.026	3.879	3.901	0.203	3.880	0.026
	30, 20	3.819	3.825	0.252	3.815	0.026	3.824	3.830	0.253	3.821	0.025
	30	3.814	3.868	0.217	3.818	0.027	3.815	3.870	0.217	3.815	0.026
	40	3.816	3.819	0.245	3.813	0.023	3.814	3.817	0.245	3.813	0.023
	40, 20	3.771	3.803	0.242	3.768	0.030	3.780	3.812	0.242	3.779	0.023
	30	3.760	3.746	0.242	3.763	0.022	3.765	3.751	0.242	3.757	0.026
	40	3.754	3.751	0.247	3.751	0.022	3.757	3.753	0.247	3.756	0.025

模型基本參數如 表一，譬如說，時點 0 之 X 股票價格 $S^X(0)$ 為 50、時點 0 之 Y 股票價格 $S^Y(0)$ 為 50、到期期限 term 為 1 (年) 且分成距到期日之日數 T 為 252 日、年化無風險利率 r 為 5%。表頭中 (0.2,0.2) 代表 X 股票報酬率年化標準差 sigmaX 為 0.20、Y 股票報酬率年化標準差 sigmaY 為 0.20。表中符號： 一期之相關係數 ρ 可能值為 0.5, 0, -0.5、X 或 Y 股票價格之移動平均日數 (n, m)，其中可能值為 20, 30, 40。 本文採用 (解析) 封閉解 (F)、數值積分法 (INT)、及蒙地卡羅法 (SIM) 等進行評價。對於數值積分法及蒙地卡羅法等，本文進一步採取重複實驗方式，故本表之選擇權價值為重複實驗結果平均值，且額外提供相對應標準誤供參考。其他相關參數為： 數值積分法取樣之樣本數 為 50000、蒙地卡羅法模擬路徑次數 500 次、及重複實驗次數為 100 次。

附表三 移動平均交換選擇權參數變動分析－(0.2, 0.3)

		Geometric					Arithmic				
ρ	(n, m)	F	SIM		INT		F	SIM		INT	
			μ	S.E.	μ	S.E.		μ	S.E.	μ	S.E.
-0.5	20, 20	8.396	8.417	0.576	8.394	0.059	8.392	8.412	0.576	8.389	0.047
	30	8.347	8.345	0.501	8.344	0.043	8.336	8.334	0.501	8.341	0.049
	40	8.294	8.215	0.550	8.291	0.052	8.277	8.199	0.550	8.269	0.047
	30, 20	8.318	8.364	0.513	8.313	0.049	8.317	8.363	0.513	8.314	0.055
	30	8.274	8.272	0.529	8.269	0.057	8.268	8.266	0.529	8.268	0.055
	40	8.225	8.222	0.479	8.227	0.051	8.212	8.209	0.479	8.211	0.056
	40, 20	8.236	8.242	0.470	8.230	0.051	8.240	8.246	0.471	8.235	0.052
	30	8.196	8.141	0.560	8.197	0.052	8.194	8.137	0.560	8.199	0.053
	40	8.151	8.317	0.533	8.150	0.050	8.142	8.307	0.533	8.139	0.051
0	20, 20	6.963	6.926	0.429	6.960	0.044	6.958	6.921	0.429	6.957	0.044
	30	6.924	6.965	0.449	6.927	0.039	6.913	6.953	0.449	6.908	0.047
	40	6.884	6.937	0.452	6.885	0.045	6.867	6.919	0.451	6.868	0.046
	30, 20	6.901	6.885	0.387	6.899	0.042	6.900	6.884	0.387	6.904	0.046
	30	6.862	6.806	0.395	6.859	0.045	6.855	6.798	0.395	6.855	0.047
	40	6.822	6.801	0.379	6.819	0.043	6.808	6.787	0.380	6.810	0.042
	40, 20	6.840	6.867	0.404	6.836	0.043	6.842	6.869	0.404	6.842	0.045
	30	6.800	6.784	0.411	6.793	0.045	6.797	6.780	0.412	6.803	0.041
	40	6.760	6.728	0.383	6.760	0.041	6.750	6.718	0.383	6.755	0.041
0.5	20, 20	5.124	5.162	0.324	5.128	0.031	5.118	5.156	0.324	5.121	0.028
	30	5.097	5.034	0.282	5.102	0.031	5.084	5.021	0.282	5.087	0.033
	40	5.074	5.099	0.306	5.073	0.032	5.055	5.080	0.306	5.051	0.032
	30, 20	5.088	5.091	0.290	5.090	0.029	5.086	5.089	0.290	5.085	0.030
	30	5.050	5.034	0.267	5.055	0.030	5.041	5.026	0.267	5.042	0.027
	40	5.021	4.943	0.322	5.019	0.031	5.006	4.928	0.322	5.009	0.027
	40, 20	5.057	5.068	0.320	5.059	0.033	5.058	5.069	0.320	5.063	0.035
	30	5.013	5.037	0.324	5.018	0.027	5.008	5.032	0.324	5.004	0.030
	40	4.976	4.942	0.305	4.976	0.030	4.964	4.930	0.305	4.965	0.032

模型基本參數如 表一，譬如說，時點 0 之 X 股票價格 $S^X(0)$ 為 50、時點 0 之 Y 股票價格 $S^Y(0)$ 為 50、到期期限 term 為 1 (年) 且分成距到期日之日數 T 為 252 日、年化無風險利率 r 為 5%。表頭中 (0.2,0.3) 代表 X 股票報酬率年化標準差 sigmaX 為 0.20、Y 股票報酬率年化標準差 sigmaY 為 0.30。表中符號： 一期之相關係數 ρ 可能值為 0.5, 0, -0.5、X 或 Y 股票價格之移動平均日數 (n, m)，其中可能值為 20, 30, 40。 本文採用 (解析) 封閉解 (F)、數值積分法 (INT)、及蒙地卡羅法 (SIM) 等進行評價。對於數值積分法及蒙地卡羅法等，本文進一步採取重複實驗方式，故本表之選擇權價值為重複實驗結果平均值，且額外提供相對應標準誤供參考。其他相關參數為： 數值積分法取樣之樣本數 為 50000、蒙地卡羅法模擬路徑次數 500 次、及重複實驗次數為 100 次。

附表四 移動平均交換選擇權參數變動分析 - (0.3, 0.2)

		Geometric					Arithmic				
ρ	(n, m)	F	SIM		INT		F	SIM		INT	
			μ	S.E.	μ	S.E.		μ	S.E.	μ	S.E.
-0.5	20, 20	8.380	8.396	0.644	8.395	0.064	8.392	8.408	0.645	8.390	0.057
	30	8.357	8.387	0.588	8.360	0.063	8.367	8.396	0.588	8.371	0.051
	40	8.332	8.221	0.516	8.328	0.060	8.339	8.228	0.517	8.330	0.061
	30, 20	8.266	8.238	0.522	8.268	0.054	8.287	8.258	0.523	8.282	0.062
	30	8.250	8.298	0.620	8.254	0.053	8.268	8.316	0.621	8.265	0.048
	40	8.228	8.173	0.601	8.220	0.065	8.243	8.189	0.601	8.241	0.061
	40, 20	8.149	8.167	0.559	8.147	0.057	8.178	8.196	0.560	8.177	0.063
	30	8.136	8.065	0.563	8.121	0.058	8.163	8.091	0.564	8.171	0.053
	40	8.118	8.143	0.611	8.118	0.061	8.142	8.167	0.612	8.139	0.059
0	20, 20	6.946	6.925	0.520	6.956	0.047	6.958	6.936	0.521	6.959	0.052
	30	6.941	6.936	0.539	6.938	0.058	6.950	6.944	0.539	6.950	0.050
	40	6.936	6.912	0.450	6.943	0.060	6.941	6.917	0.451	6.937	0.053
	30, 20	6.843	6.804	0.503	6.850	0.052	6.863	6.824	0.505	6.865	0.050
	30	6.837	6.785	0.562	6.845	0.056	6.855	6.803	0.563	6.851	0.053
	40	6.832	6.858	0.514	6.830	0.049	6.846	6.872	0.515	6.847	0.048
	40, 20	6.739	6.734	0.454	6.746	0.047	6.768	6.762	0.455	6.773	0.053
	30	6.733	6.662	0.461	6.728	0.045	6.759	6.687	0.462	6.768	0.049
	40	6.727	6.704	0.516	6.726	0.049	6.750	6.727	0.517	6.743	0.052
0.5	20, 20	5.107	5.134	0.396	5.111	0.037	5.118	5.144	0.397	5.116	0.036
	30	5.127	5.119	0.346	5.128	0.041	5.135	5.127	0.346	5.129	0.037
	40	5.153	5.086	0.390	5.158	0.040	5.157	5.091	0.390	5.159	0.035
	30, 20	5.016	5.089	0.355	5.015	0.042	5.035	5.108	0.356	5.040	0.040
	30	5.026	5.019	0.388	5.030	0.037	5.041	5.035	0.389	5.048	0.041
	40	5.044	5.035	0.364	5.038	0.038	5.057	5.048	0.364	5.057	0.033
	40, 20	4.929	4.881	0.378	4.933	0.039	4.956	4.907	0.380	4.953	0.033
	30	4.932	4.933	0.372	4.929	0.031	4.956	4.956	0.373	4.959	0.039
	40	4.943	4.905	0.413	4.944	0.033	4.964	4.926	0.415	4.961	0.036

模型基本參數如 表一，譬如說，時點 0 之 X 股票價格 $S^X(0)$ 為 50、時點 0 之 Y 股票價格 $S^Y(0)$ 為 50、到期期限 term 為 1 (年) 且分成距到期日之日數 T 為 252 日、年化無風險利率 r 為 5%。表頭中 (0.3,0.2) 代表 X 股票報酬率年化標準差 sigmaX 為 0.30、Y 股票報酬率年化標準差 sigmaY 為 0.20。表中符號： 一期之相關係數 ρ 可能值為 0.5, 0, -0.5、X 或 Y 股票價格之移動平均日數 (n, m)，其中可能值為 20, 30, 40。 本文採用 (解析) 封閉解 (F)、數值積分法 (INT)、及蒙地卡羅法 (SIM) 等進行評價。對於數值積分法及蒙地卡羅法等，本文進一步採取重複實驗方式，故本表之選擇權價值為重複實驗結果平均值，且額外提供相對應標準誤供參考。其他相關參數為： 數值積分法取樣之樣本數 為 50000、蒙地卡羅法模擬路徑次數 500 次、及重複實驗次數為 100 次。

附表五 移動平均交換選擇權對X股票風險係數之參數變動分析－(0.2, 0.2)

		Geometric				Arithmic			
ρ	(n, m)	Delta		Gamma		Delta		Gamma	
		F	N	F	N	F	N	F	N
-0.5	20, 20	0.56578	0.56578	0.02326	0.02326	0.56593	0.56593	0.02326	0.02326
	30	0.56661	0.56661	0.02342	0.02342	0.56560	0.56661	0.02327	0.02343
	40	0.56743	0.56743	0.02360	0.02360	0.56524	0.56727	0.02329	0.02361
	30, 20	0.56334	0.56334	0.02342	0.02342	0.56473	0.56372	0.02359	0.02343
	30	0.56422	0.56422	0.02357	0.02357	0.56444	0.56444	0.02358	0.02358
	40	0.56506	0.56506	0.02374	0.02374	0.56411	0.56513	0.02359	0.02375
	40, 20	0.56085	0.56085	0.02360	0.02360	0.56350	0.56147	0.02394	0.02361
	30	0.56176	0.56176	0.02374	0.02374	0.56324	0.56222	0.02392	0.02375
	40	0.56264	0.56264	0.02390	0.02390	0.56294	0.56295	0.02391	0.02391
0	20, 20	0.55360	0.55360	0.02862	0.02862	0.55375	0.55375	0.02863	0.02863
	30	0.55484	0.55484	0.02881	0.02881	0.55337	0.55480	0.02863	0.02882
	40	0.55610	0.55610	0.02900	0.02900	0.55298	0.55586	0.02863	0.02901
	30, 20	0.55098	0.55098	0.02881	0.02881	0.55282	0.55139	0.02901	0.02882
	30	0.55222	0.55222	0.02900	0.02900	0.55244	0.55244	0.02901	0.02901
	40	0.55347	0.55347	0.02920	0.02920	0.55205	0.55350	0.02901	0.02921
	40, 20	0.54834	0.54834	0.02900	0.02900	0.55189	0.54902	0.02942	0.02901
	30	0.54957	0.54957	0.02920	0.02920	0.55150	0.55006	0.02942	0.02921
	40	0.55082	0.55082	0.02940	0.02940	0.55112	0.55112	0.02942	0.02942
0.5	20, 20	0.53765	0.53765	0.04067	0.04067	0.53779	0.53779	0.04068	0.04068
	30	0.53972	0.53972	0.04089	0.04089	0.53729	0.53959	0.04063	0.04090
	40	0.54186	0.54186	0.04106	0.04106	0.53683	0.54146	0.04054	0.04107
	30, 20	0.53452	0.53452	0.04089	0.04089	0.53730	0.53501	0.04117	0.04090
	30	0.53650	0.53650	0.04121	0.04121	0.53671	0.53672	0.04122	0.04122
	40	0.53859	0.53859	0.04145	0.04145	0.53620	0.53853	0.04119	0.04146
	40, 20	0.53142	0.53142	0.04106	0.04106	0.53685	0.53225	0.04165	0.04107
	30	0.53333	0.53333	0.04145	0.04145	0.53621	0.53389	0.04175	0.04146
	40	0.53535	0.53535	0.04177	0.04177	0.53563	0.53564	0.04179	0.04179

模型基本參數如 表一，譬如說，時點 0 之 X 股票價格 $S^X(0)$ 為 50、時點 0 之 Y 股票價格 $S^Y(0)$ 為 50、到期期限 term 為 1 (年) 且分成距到期日之日數 T 為 252 日、年化無風險利率 r 為 5%。表頭中 (0.2, 0.2) 代表 X 股票報酬率年化標準差 sigmaX 為 0.20、Y 股票報酬率年化標準差 sigmaY 為 0.20。表中符號： 一期之相關係數 ρ 可能值為 0.5, 0, -0.5、X 或 Y 股票價格之移動平均日數 (n, m)，其中可能值為 20, 30, 40。 本文採用公式解進行計算，且另採用 (解析) 封閉解之數值微分驗證。表中 F 代表公式解，而且 N 代表其 (解析) 封閉解之數值微分。

附表六 移動平均交換選擇權對 X 股票風險係數之參數變動分析－(0.2, 0.3)

		Geometric				Arithmic			
ρ	(n, m)	Delta		Gamma		Delta		Gamma	
		F	N	F	N	F	N	F	N
-0.5	20, 20	0.58312	0.58312	0.01833	0.01833	0.58297	0.58298	0.01834	0.01834
	30	0.58356	0.58356	0.01849	0.01849	0.58240	0.58313	0.01834	0.01850
	40	0.58398	0.58398	0.01867	0.01867	0.58179	0.58327	0.01836	0.01868
	30, 20	0.58098	0.58098	0.01842	0.01842	0.58176	0.58103	0.01860	0.01843
	30	0.58147	0.58147	0.01858	0.01858	0.58124	0.58124	0.01859	0.01859
	40	0.58192	0.58192	0.01875	0.01875	0.58066	0.58141	0.01859	0.01876
	40, 20	0.57879	0.57879	0.01853	0.01853	0.58052	0.57904	0.01888	0.01854
	30	0.57931	0.57931	0.01868	0.01868	0.58003	0.57929	0.01886	0.01869
	40	0.57980	0.57980	0.01884	0.01884	0.57949	0.57949	0.01885	0.01885
0	20, 20	0.56885	0.56885	0.02232	0.02232	0.56864	0.56864	0.02232	0.02233
	30	0.56964	0.56964	0.02253	0.02253	0.56797	0.56909	0.02232	0.02254
	40	0.57045	0.57045	0.02274	0.02274	0.56729	0.56955	0.02232	0.02276
	30, 20	0.56666	0.56666	0.02240	0.02240	0.56778	0.56667	0.02263	0.02241
	30	0.56744	0.56744	0.02262	0.02262	0.56711	0.56711	0.02263	0.02263
	40	0.56824	0.56824	0.02284	0.02284	0.56643	0.56757	0.02263	0.02285
	40, 20	0.56446	0.56446	0.02249	0.02249	0.56692	0.56469	0.02295	0.02250
	30	0.56523	0.56523	0.02271	0.02271	0.56624	0.56512	0.02295	0.02272
	40	0.56602	0.56602	0.02293	0.02293	0.56556	0.56557	0.02295	0.02295
0.5	20, 20	0.55059	0.55059	0.03063	0.03063	0.55023	0.55024	0.03064	0.03064
	30	0.55204	0.55204	0.03095	0.03095	0.54936	0.55121	0.03061	0.03097
	40	0.55357	0.55357	0.03126	0.03126	0.54853	0.55226	0.03055	0.03128
	30, 20	0.54820	0.54820	0.03064	0.03064	0.54994	0.54812	0.03102	0.03065
	30	0.54953	0.54953	0.03103	0.03103	0.54897	0.54898	0.03105	0.03105
	40	0.55098	0.55098	0.03138	0.03138	0.54808	0.54996	0.03103	0.03140
	40, 20	0.54587	0.54587	0.03062	0.03062	0.54968	0.54606	0.03139	0.03064
	30	0.54710	0.54710	0.03106	0.03106	0.54867	0.54683	0.03146	0.03108
	40	0.54846	0.54846	0.03146	0.03146	0.54770	0.54771	0.03148	0.03148

模型基本參數如 表一，譬如說，時點 0 之 X 股票價格 $S^X(0)$ 為 50、時點 0 之 Y 股票價格 $S^Y(0)$ 為 50、到期期限 term 為 1 (年) 且分成距到期日之日數 T 為 252 日、年化無風險利率 r 為 5%。表頭中 (0.2,0.3) 代表 X 股票報酬率年化標準差 sigmaX 為 0.20、Y 股票報酬率年化標準差 sigmaY 為 0.30。表中符號： 一期之相關係數 ρ 可能值為 0.5，0，-0.5、X 或 Y 股票價格之移動平均日數 (n, m)，其中可能值為 20，30，40。 本文採用公式解進行計算，且另採用 (解析) 封閉解之數值微分驗證。表中 F 代表公式解，而且 N 代表其 (解析) 封閉解之數值微分。

附表七 移動平均交換選擇權對X股票風險係數之參數變動分析－(0.3, 0.2)

		Geometric				Arithmic			
ρ	(n, m)	Delta		Gamma		Delta		Gamma	
		F	N	F	N	F	N	F	N
-0.5	20, 20	0.58233	0.58233	0.01833	0.01833	0.58297	0.58298	0.01834	0.01834
	30	0.58290	0.58290	0.01842	0.01842	0.58270	0.58343	0.01834	0.01844
	40	0.58346	0.58346	0.01853	0.01853	0.58240	0.58387	0.01836	0.01854
	30, 20	0.57962	0.57962	0.01849	0.01849	0.58145	0.58072	0.01860	0.01851
	30	0.58026	0.58026	0.01858	0.01858	0.58124	0.58124	0.01859	0.01860
	40	0.58085	0.58085	0.01868	0.01868	0.58097	0.58171	0.01859	0.01869
	40, 20	0.57685	0.57685	0.01867	0.01867	0.57990	0.57842	0.01888	0.01868
	30	0.57753	0.57753	0.01875	0.01875	0.57971	0.57897	0.01886	0.01876
	40	0.57817	0.57817	0.01884	0.01884	0.57949	0.57949	0.01885	0.01885
0	20, 20	0.56793	0.56793	0.02232	0.02232	0.56864	0.56864	0.02232	0.02233
	30	0.56889	0.56889	0.02240	0.02240	0.56834	0.56945	0.02232	0.02241
	40	0.56986	0.56986	0.02249	0.02249	0.56804	0.57028	0.02232	0.02250
	30, 20	0.56507	0.56507	0.02253	0.02253	0.56740	0.56629	0.02263	0.02254
	30	0.56604	0.56604	0.02262	0.02262	0.56711	0.56711	0.02263	0.02263
	40	0.56701	0.56701	0.02271	0.02271	0.56681	0.56794	0.02263	0.02273
	40, 20	0.56219	0.56219	0.02274	0.02274	0.56617	0.56392	0.02295	0.02276
	30	0.56316	0.56316	0.02284	0.02284	0.56587	0.56474	0.02295	0.02285
	40	0.56413	0.56413	0.02293	0.02293	0.56556	0.56557	0.02295	0.02295
0.5	20, 20	0.54940	0.54940	0.03063	0.03063	0.55023	0.55024	0.03064	0.03064
	30	0.55108	0.55108	0.03064	0.03064	0.54988	0.55171	0.03061	0.03066
	40	0.55280	0.55280	0.03062	0.03062	0.54957	0.55322	0.03055	0.03064
	30, 20	0.54613	0.54613	0.03095	0.03096	0.54943	0.54760	0.03102	0.03098
	30	0.54772	0.54772	0.03103	0.03103	0.54897	0.54898	0.03105	0.03106
	40	0.54940	0.54940	0.03106	0.03106	0.54860	0.55045	0.03103	0.03108
	40, 20	0.54287	0.54287	0.03126	0.03126	0.54867	0.54498	0.03139	0.03128
	30	0.54440	0.54440	0.03138	0.03138	0.54816	0.54630	0.03146	0.03141
	40	0.54602	0.54602	0.03146	0.03146	0.54770	0.54771	0.03148	0.03148

模型基本參數如 表一，譬如說，時點 0 之 X 股票價格 $S^X(0)$ 為 50、時點 0 之 Y 股票價格 $S^Y(0)$ 為 50、到期期限 term 為 1 (年) 且分成距到期日之日數 T 為 252 日、年化無風險利率 r 為 5%。表頭中 (0.3,0.2) 代表 X 股票報酬率年化標準差 sigmaX 為 0.30、Y 股票報酬率年化標準差 sigmaY 為 0.20。表中符號： 一期之相關係數 ρ 可能值為 0.5，0，-0.5、X 或 Y 股票價格之移動平均日數 (n, m)，其中可能值為 20，30，40。 本文採用公式解進行計算，且另採用 (解析) 封閉解之數值微分驗證。表中 F 代表公式解，而且 N 代表其 (解析) 封閉解之數值微分。

附表八 移動平均交換選擇權對Y股票風險係數之參數變動分析－(0.2, 0.2)

		Geometric				Arithmic			
ρ	**(n, m)**	**Delta**		**Gamma**		**Delta**		**Gamma**	
		F	**N**	**F**	**N**	**F**	**N**	**F**	**N**
-0.5	20, 20	-0.43207	-0.43207	0.02326	0.02326	-0.43218	-0.43218	0.02326	0.02326
	30	-0.43339	-0.43339	0.02342	0.02342	-0.43221	-0.43341	0.02327	0.02343
	40	-0.43476	-0.43476	0.02360	0.02360	-0.43226	-0.43467	0.02329	0.02361
	30, 20	-0.43124	-0.43124	0.02342	0.02342	-0.43271	-0.43151	0.02359	0.02343
	30	-0.43251	-0.43251	0.02357	0.02357	-0.43268	-0.43268	0.02358	0.02358
	40	-0.43385	-0.43385	0.02374	0.02374	-0.43270	-0.43392	0.02359	0.02375
	40, 20	-0.43042	-0.43042	0.02360	0.02360	-0.43327	-0.43085	0.02394	0.02361
	30	-0.43167	-0.43167	0.02374	0.02374	-0.43321	-0.43200	0.02392	0.02375
	40	-0.43297	-0.43297	0.02390	0.02390	-0.43320	-0.43320	0.02391	0.02391
0	20, 20	-0.44425	-0.44425	0.02862	0.02862	-0.44437	-0.44437	0.02863	0.02863
	30	-0.44575	-0.44575	0.02881	0.02881	-0.44437	-0.44574	0.02863	0.02882
	40	-0.44728	-0.44728	0.02900	0.02900	-0.44437	-0.44712	0.02863	0.02901
	30, 20	-0.44301	-0.44301	0.02881	0.02881	-0.44469	-0.44332	0.02901	0.02882
	30	-0.44452	-0.44452	0.02900	0.02900	-0.44469	-0.44469	0.02901	0.02902
	40	-0.44604	-0.44604	0.02920	0.02920	-0.44469	-0.44608	0.02901	0.02921
	40, 20	-0.44175	-0.44175	0.02900	0.02900	-0.44502	-0.44225	0.02942	0.02901
	30	-0.44326	-0.44326	0.02920	0.02920	-0.44502	-0.44363	0.02942	0.02921
	40	-0.44479	-0.44479	0.02940	0.02940	-0.44502	-0.44502	0.02942	0.02942
0.5	20, 20	-0.46021	-0.46021	0.04067	0.04067	-0.46033	-0.46033	0.04068	0.04068
	30	-0.46221	-0.46221	0.04089	0.04089	-0.46028	-0.46212	0.04063	0.04090
	40	-0.46419	-0.46419	0.04106	0.04105	-0.46020	-0.46389	0.04054	0.04107
	30, 20	-0.45813	-0.45813	0.04089	0.04089	-0.46037	-0.45852	0.04117	0.04090
	30	-0.46023	-0.46023	0.04121	0.04121	-0.46041	-0.46041	0.04122	0.04122
	40	-0.46228	-0.46228	0.04145	0.04145	-0.46038	-0.46225	0.04119	0.04146
	40, 20	-0.45599	-0.45599	0.04106	0.04106	-0.46038	-0.45666	0.04165	0.04107
	30	-0.45814	-0.45814	0.04145	0.04145	-0.46047	-0.45860	0.04175	0.04146
	40	-0.46026	-0.46026	0.04177	0.04177	-0.46050	-0.46050	0.04179	0.04179

模型基本參數如 表一，譬如說，時點 0 之 X 股票價格 $S^X(0)$ 為 50、時點 0 之 Y 股票價格 $S^Y(0)$ 為 50、到期期限 term 為 1 (年) 且分成距到期日之日數 T 為 252 日、年化無風險利率 r 為 5%。表頭中 (0.2,0.2) 代表 X 股票報酬率年化標準差 sigmaX 為 0.20、Y 股票報酬率年化標準差 sigmaY 為 0.20。表中符號： 一期之相關係數 ρ 可能值為 0.5, 0, -0.5、X 或 Y 股票價格之移動平均日數 (n, m)，其中可能值為 20, 30, 40。 本文採用公式解進行計算，且另採用 (解析) 封閉解之數值微分驗證。表中 F 代表公式解，而且 N 代表其 (解析) 封閉解之數值微分。

附表九　移動平均交換選擇權對Y股票風險係數之參數變動分析－(0.2, 0.3)

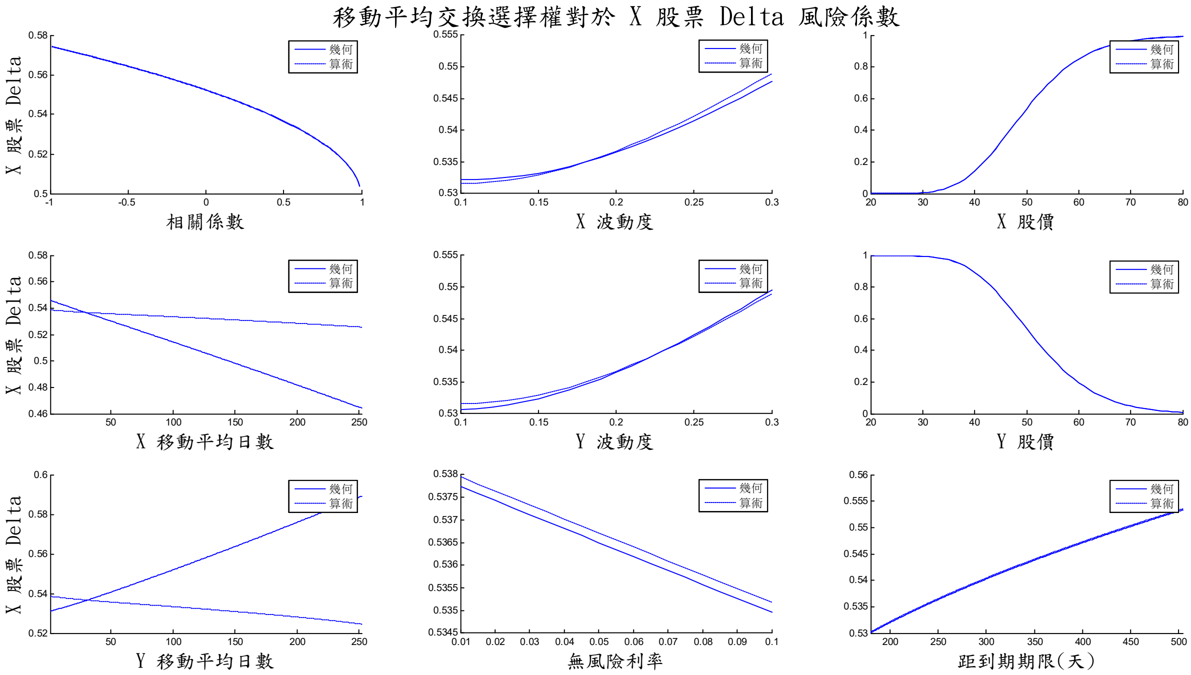
		Geometric				Arithmic			
ρ	**(n, m)**	**Delta**		**Gamma**		**Delta**		**Gamma**	
		F	**N**	**F**	**N**	**F**	**N**	**F**	**N**
-0.5	20, 20	-0.41520	-0.41520	0.01833	0.01833	-0.41514	-0.41514	0.01834	0.01834
	30	-0.41662	-0.41662	0.01849	0.01849	-0.41517	-0.41641	0.01834	0.01851
	40	-0.41810	-0.41810	0.01867	0.01867	-0.41523	-0.41773	0.01836	0.01868
	30, 20	-0.41462	-0.41462	0.01842	0.01842	-0.41592	-0.41468	0.01860	0.01844
	30	-0.41598	-0.41598	0.01858	0.01858	-0.41589	-0.41589	0.01859	0.01860
	40	-0.41742	-0.41742	0.01875	0.01875	-0.41591	-0.41717	0.01859	0.01876
	40, 20	-0.41406	-0.41406	0.01853	0.01853	-0.41673	-0.41425	0.01888	0.01854
	30	-0.41539	-0.41539	0.01868	0.01868	-0.41667	-0.41542	0.01886	0.01870
	40	-0.41678	-0.41678	0.01884	0.01884	-0.41665	-0.41665	0.01885	0.01885
0	20, 20	-0.42960	-0.42960	0.02232	0.02232	-0.42948	-0.42948	0.02232	0.02233
	30	-0.43116	-0.43116	0.02253	0.02253	-0.42948	-0.43084	0.02232	0.02255
	40	-0.43277	-0.43277	0.02274	0.02274	-0.42948	-0.43222	0.02232	0.02276
	30, 20	-0.42863	-0.42863	0.02240	0.02240	-0.43002	-0.42867	0.02263	0.02241
	30	-0.43020	-0.43020	0.02262	0.02262	-0.43002	-0.43002	0.02263	0.02264
	40	-0.43180	-0.43180	0.02284	0.02284	-0.43002	-0.43140	0.02263	0.02285
	40, 20	-0.42766	-0.42766	0.02249	0.02249	-0.43057	-0.42784	0.02295	0.02250
	30	-0.42922	-0.42922	0.02271	0.02271	-0.43057	-0.42919	0.02295	0.02273
	40	-0.43082	-0.43082	0.02293	0.02293	-0.43057	-0.43057	0.02295	0.02295
0.5	20, 20	-0.44812	-0.44812	0.03063	0.03063	-0.44788	-0.44788	0.03064	0.03064
	30	-0.45011	-0.45011	0.03095	0.03095	-0.44783	-0.44953	0.03061	0.03098
	40	-0.45208	-0.45208	0.03126	0.03126	-0.44773	-0.45116	0.03055	0.03128
	30, 20	-0.44645	-0.44645	0.03064	0.03064	-0.44810	-0.44641	0.03102	0.03066
	30	-0.44852	-0.44852	0.03103	0.03103	-0.44815	-0.44815	0.03105	0.03106
	40	-0.45056	-0.45056	0.03138	0.03138	-0.44811	-0.44984	0.03103	0.03141
	40, 20	-0.44473	-0.44473	0.03062	0.03062	-0.44829	-0.44489	0.03139	0.03064
	30	-0.44684	-0.44684	0.03106	0.03106	-0.44839	-0.44667	0.03146	0.03109
	40	-0.44894	-0.44894	0.03146	0.03146	-0.44843	-0.44843	0.03148	0.03148

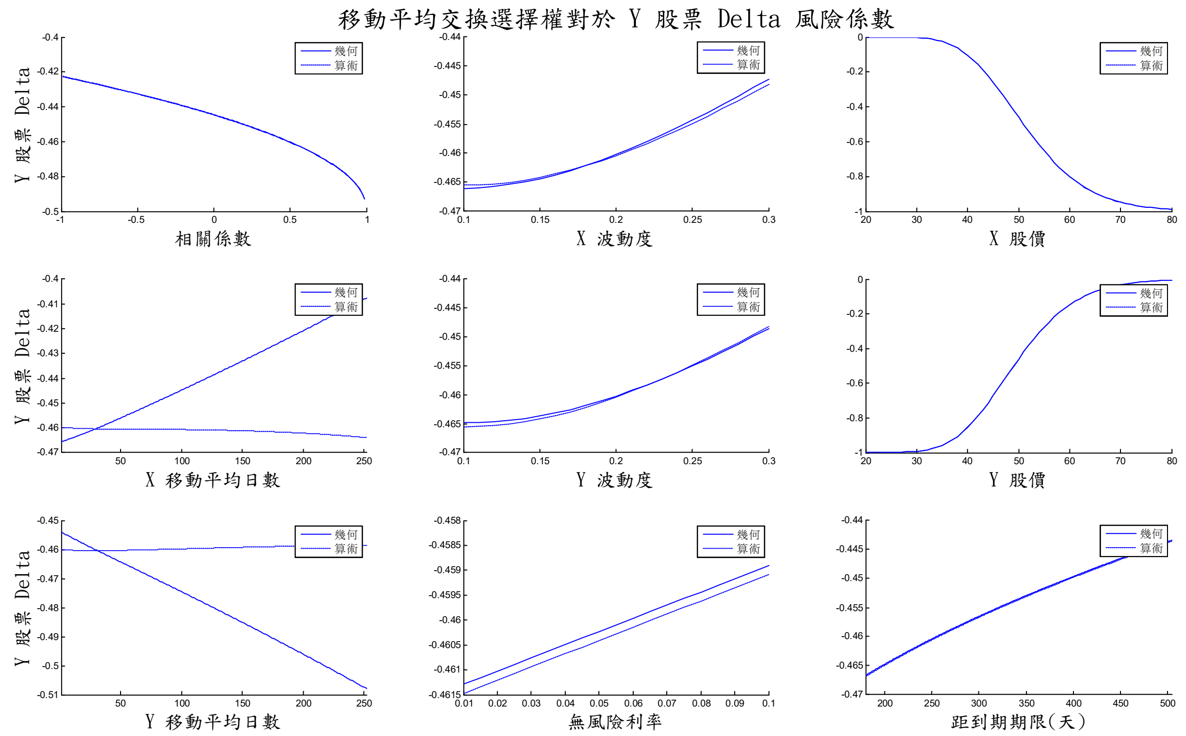
模型基本參數如 表一，譬如說，時點 0 之 X 股票價格 $S^X(0)$ 為 50、時點 0 之 Y 股票價格 $S^Y(0)$ 為 50、到期期限 term 為 1 (年) 且分成距到期日之日數 T 為 252 日、年化無風險利率 r 為 5%。表頭中 (0.2, 0.3) 代表 X 股票報酬率年化標準差 sigmaX 為 0.20、Y 股票報酬率年化標準差 sigmaY 為 0.30。表中符號： 一期之相關係數 ρ 可能值為 0.5, 0, -0.5、X 或 Y 股票價格之移動平均日數 (n, m)，其中可能值為 20, 30, 40。 本文採用公式解進行計算，且另採用 (解析) 封閉解之數值微分驗證。表中 F 代表公式解，而且 N 代表其 (解析) 封閉解之數值微分。

附表十 移動平均交換選擇權對Y股票風險係數之參數變動分析－(0.3, 0.2)

		Geometric				Arithmic			
ρ	**(n, m)**	**Delta**		**Gamma**		**Delta**		**Gamma**	
		F	**N**	**F**	**N**	**F**	**N**	**F**	**N**
-0.5	20, 20	-0.41473	-0.41473	0.01833	0.01833	-0.41514	-0.41514	0.01834	0.01834
	30	-0.41575	-0.41575	0.01842	0.01842	-0.41517	-0.41610	0.01834	0.01843
	40	-0.41682	-0.41682	0.01853	0.01853	-0.41523	-0.41710	0.01836	0.01854
	30, 20	-0.41430	-0.41430	0.01849	0.01849	-0.41592	-0.41498	0.01860	0.01850
	30	-0.41527	-0.41527	0.01858	0.01858	-0.41589	-0.41589	0.01859	0.01859
	40	-0.41630	-0.41630	0.01868	0.01868	-0.41591	-0.41686	0.01859	0.01869
	40, 20	-0.41388	-0.41388	0.01867	0.01867	-0.41673	-0.41485	0.01888	0.01868
	30	-0.41482	-0.41482	0.01875	0.01875	-0.41667	-0.41572	0.01886	0.01876
	40	-0.41581	-0.41581	0.01884	0.01884	-0.41665	-0.41665	0.01885	0.01885
0	20, 20	-0.42900	-0.42900	0.02232	0.02232	-0.42948	-0.42948	0.02232	0.02233
	30	-0.43007	-0.43007	0.02240	0.02240	-0.42948	-0.43046	0.02232	0.02241
	40	-0.43115	-0.43115	0.02249	0.02249	-0.42948	-0.43145	0.02232	0.02250
	30, 20	-0.42821	-0.42821	0.02253	0.02253	-0.43002	-0.42903	0.02263	0.02254
	30	-0.42929	-0.42929	0.02262	0.02261	-0.43002	-0.43002	0.02263	0.02263
	40	-0.43038	-0.43038	0.02271	0.02271	-0.43002	-0.43102	0.02263	0.02272
	40, 20	-0.42740	-0.42740	0.02274	0.02274	-0.43057	-0.42856	0.02295	0.02276
	30	-0.42849	-0.42849	0.02284	0.02283	-0.43057	-0.42956	0.02295	0.02285
	40	-0.42959	-0.42959	0.02293	0.02293	-0.43057	-0.43057	0.02295	0.02295
0.5	20, 20	-0.44726	-0.44726	0.03063	0.03063	-0.44788	-0.44788	0.03064	0.03064
	30	-0.44853	-0.44853	0.03064	0.03064	-0.44783	-0.44901	0.03061	0.03066
	40	-0.44975	-0.44975	0.03062	0.03062	-0.44773	-0.45008	0.03055	0.03064
	30, 20	-0.44582	-0.44582	0.03095	0.03096	-0.44810	-0.44691	0.03102	0.03097
	30	-0.44721	-0.44721	0.03103	0.03103	-0.44815	-0.44815	0.03105	0.03105
	40	-0.44851	-0.44851	0.03106	0.03106	-0.44811	-0.44931	0.03103	0.03108
	40, 20	-0.44429	-0.44429	0.03126	0.03126	-0.44829	-0.44585	0.03139	0.03128
	30	-0.44575	-0.44575	0.03138	0.03138	-0.44839	-0.44717	0.03146	0.03141
	40	-0.44715	-0.44715	0.03146	0.03146	-0.44843	-0.44843	0.03148	0.03148

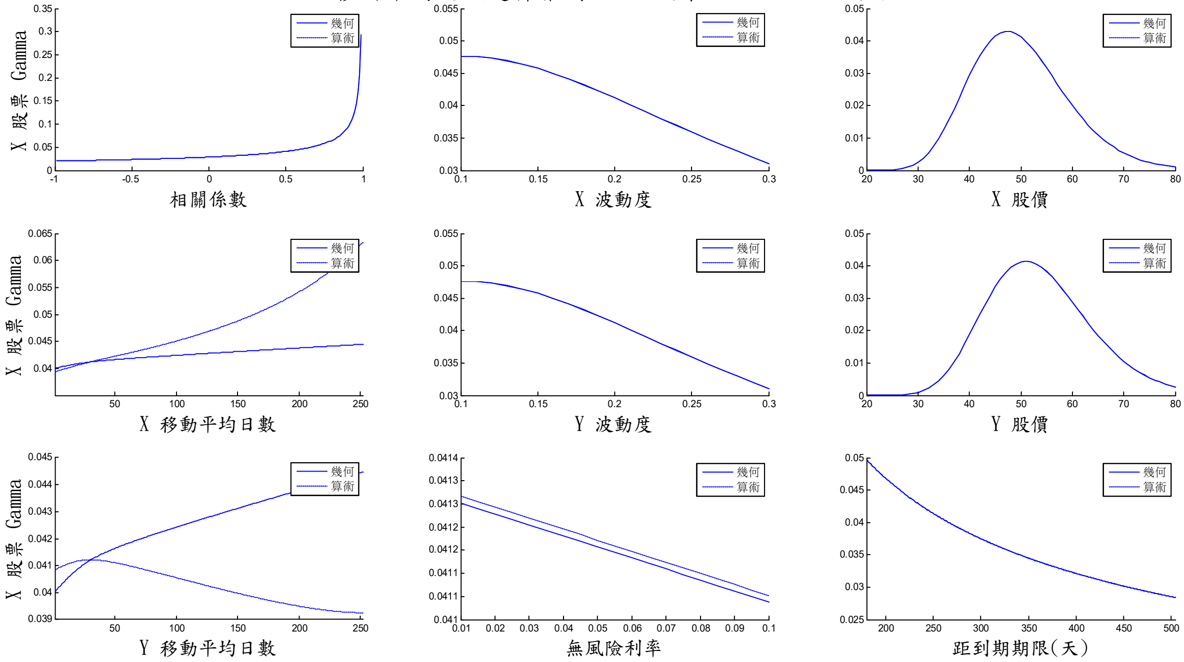
模型基本參數如 表一，譬如說，時點 0 之 X 股票價格 $S^X(0)$ 為 50、時點 0 之 Y 股票價格 $S^Y(0)$ 為 50、到期期限 term 為 1 (年) 且分成距到期日之日數 T 為 252 日、年化無風險利率 r 為 5%。表頭中 (0.3, 0.2) 代表 X 股票報酬率年化標準差 sigmaX 為 0.30、Y 股票報酬率年化標準差 sigmaY 為 0.20。表中符號： 一期之相關係數 ρ 可能值為 0.5, 0, -0.5、X 或 Y 股票價格之移動平均日數 (n, m)，其中可能值為 20, 30, 40。 本文採用公式解進行計算，且另採用 (解析) 封閉解之數值微分驗證。表中 F 代表公式解，而且 N 代表其 (解析) 封閉解之數值微分。



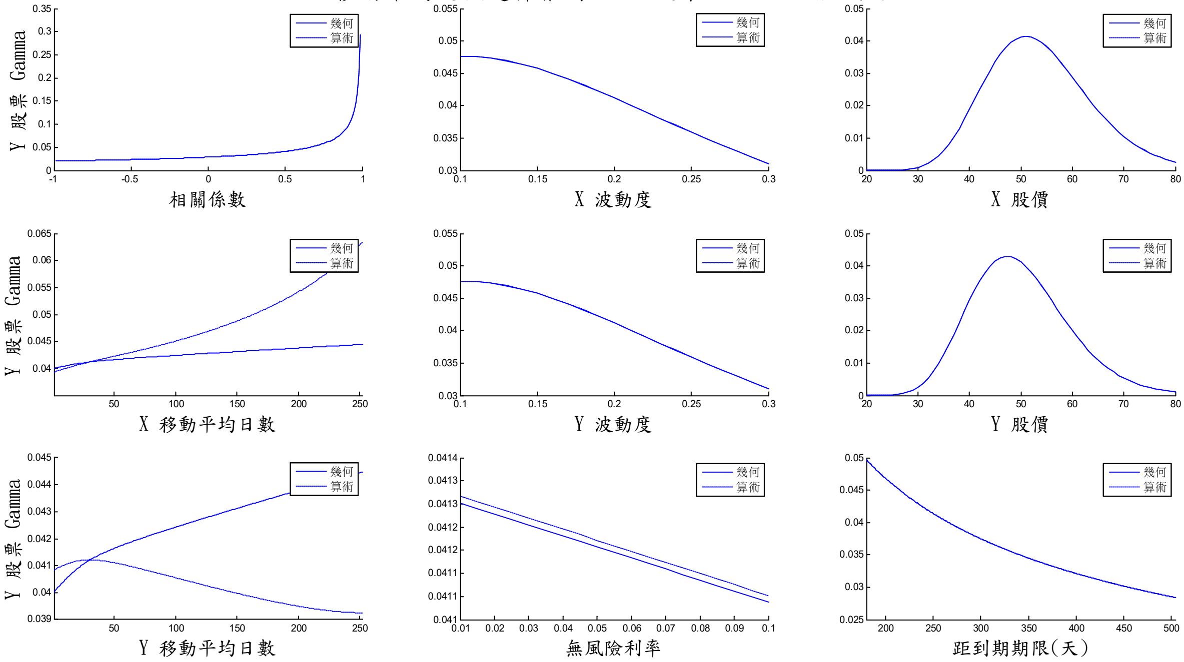


附圖一 移動平均交換選擇權 Delta 的影響因素分析

移動平均交換選擇權對於 X 股票 Gamma 風險係數



移動平均交換選擇權對於 Y 股票 Gamma 風險係數



附圖二 移動平均交換選擇權 Gamma 的影響因素分析

參考文獻

Black, F., & M. Scholes, “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, *Journal of Political Economy*, Vol. 81 (3), 1973, pp. 637-654.

Boyle, P., Broadie, M., & P. Glasserman, “Monte Carlo Methods for Security Pricing”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 21 (8-9), 1997, pp. 1267-1321.

Dai, M., Li, P. F., & J. E. Zhang, “A Lattice Algorithm for Pricing Moving Average Barrier Options”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 34 (3), 2010, pp. 542-554.

Dai, T. S., Fang, Y. Y., & Y. D. Lyuu, “Analytics for Geometric Average Trigger Reset Options”, *Applied Economics Letters*, Vol. 12 (13), 2005, pp. 835-840.

Heritage, J. P. “Pricing Moving Average Barrier Options”, *Journal of Computational Finance*, Vol. 5 (4), 2002, pp. 51-67.

Kao, C. H., & Y. D. Lyuu, “Pricing of Moving-average-type Options with Applications”, *Journal of Futures Markets*, Vol. 23 (5), 2003, pp. 415-440.

Kemna, A. G. Z., & A. C. F. Vorst, “A Pricing Method for Options Based on Average Asset Values”, *Journal of Banking and Finance*, Vol. 14 (1), 1990, pp. 113-129.

Levy, E. “Pricing European Average Rate Currency Options”, *Journal of International Money and Finance*, Vol. 11 (5), 1992, pp. 474-491.

Margrabe, W. “The Value of an Option to Exchange One Asset for Another”, *The Journal of Finance*, Vol. 33 (1), 1978, pp. 177-186.

Merton, R. C. “Theory of Rational Option Pricing”, *The Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol. 4 (1), 1973, pp. 141-183.

Milevsky, M. A., & S. E. Posner, “Asian Options, the Sum of Lognormals, and the Reciprocal Gamma Distribution”, *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 33 (3), 1998, pp. 409-422.

Turnbull, S. M., & L. M. Wakeman, “A Quick Algorithm for Pricing European Average Options”, *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 26 (3), 1991, pp. 377-389.

Vorst, T. “Prices and Hedge Ratios of Average Exchange Rate Options”, *International Review of Financial Analysis*, Vol. 1 (3), 1992, pp. 179-193.

Financial Products Innovation and Their Pricing: Moving Average Exchange Options

CHIEN-SHAN HAN, CHIA-CHOU CHIU, CHEN-YU TSAI, JUNG-CHIH CHIEN *

ABSTRACT

This article explores financial products innovation and their pricing, and discusses moving average exchange options. This article is mainly to extend Margrabe (1978) European exchange option. The payoff of this financial products is innovated by means of arithmetic or geometric mean, from a positive difference of the prices of two assets chosen to positive difference of moving average prices of two assets chosen. However, options are either European or American (style) options, and in theory, the value of American options are equal to the value of European options plus the early exercise premium. But, when early exercise of the options is not optimal, American options are equivalent to European options. Therefore, this article provides a view of European options, which helps to explore the characteristics of these options.

In trading practice, taking stock assets as an example, the average moving stock price is regarded as the average value of the selling investment portfolio, or the average construction value of the buying investment portfolio, especially when the stocks are bought or sold successively or separately. In addition, in case of stock spread trade, a moving average exchange option also provides a good hedging tool.

Finally, this paper provides numerical integration and (analytic) closed-solution to evaluate European-style arithmetic and geometric moving average exchange options, using Monte Carlo to prove its accuracy. We also provide risk measurements, for example, Delta, Gamma, etc. It is used in the risk management of this option and its hedging portfolios.

Keywords: moving average exchange options, moving average, exchange options, European options

* Chien-Shan Han, Associate Professor, Department of Finance and International Business, Fu Jen Catholic University. Chia-Chou Chiu, Assistant Professor, Department of Finance and International Business, Fu Jen Catholic University. Chen-Yu Tsai, Associate Technical Specialist, Procurement Office, New Taipei City Government. Jung-Chih Chien, Assistant Vice President, Private Banking Department, Private Banking Group, Cathay United Bank.