輔仁管理評論
中華民國 87 年 9 月，第五卷第二期，155-176

台灣地區生命表之編製－蔣氏終壽年齡區間存活成數之應用

林正祥
東海大學統計學系

(收稿日期：85 年 11 月 4 日；第一次修正：86 年 3 月 25 日；
接受刊登日期：86 年 6 月 2 日)

摘要

生命表的發展由來已久，有許多方法為了達到數據光滑的優點，大都是採用複雜的數學公式，藉此所得的生命表函數較難進行統計推論。五十年代前期由於醫學隨訪方面的研究，生命表才受到注意。但也因為統計和機率理論的發展，才有可能以隨機的觀點來處理生命表，Chiang (1984) 即是利用隨機過程之觀念對生命表提供了理論基礎，本文所用之終壽年齡區間存活成數 a 即是其所創，他給了 a_i 一個理論基礎，因此在算出各年齡區間的 a_i 值之後，我們就很快的可以建立簡易生命表，而且 a_i 非常的穩定，不會隨時間而變化，因此可以每十年修正一次，本文提供了 1992 年台灣地區全部人口、男性及女性之 a_i 值，我們在十年內可以一直採用此一 a_i，直到 2002 年之前不用更改。這要比一般傳統的生命表編製法要簡捷許多，而且其又有嚴密的理論基礎，能在台灣地區推廣應是相當有意義的。此外，我們比較了蔣氏生命表和其他生命表，發現其所推估的死亡機率都相當接近；另外，我們亦指出國內所編製之生命表中某些指標之錯誤說明並加以澄清。

關鍵詞彙：終壽年齡區間存活成數，完全生命表，簡易生命表

壹．前言

生命表 (Life Table) 係指一定期間，於特定範圍之全體人口，因死亡而產生之狀態，以各種函數表示之統計表。其功能在測定某一時期人口的死亡水準，為衡量國民生命消長情形之綜合指標，並利用較新生命表以測量未來人口壽命的長短，該表主要是應用於保險科學，作生命的隨機分析，亦可用於人口學，作人口變遷的研究。相應的數學方法已先後發展起來。雖然這些工作在繼續進行著，但是生命表在一個很長的時期裏一直處於正規的統計學門戶之外。本世紀 50 年代以前，人們對生命表這一分析工具的潛力缺乏足夠的認識。50 年代前期，由於衛生統計學家在醫學隨訪方面的工作，生命表才開始受到重視，但也由於機率和統計理論的發展才有可能以純隨機的觀點來處理生命表並提供其理論基礎。

生命表有兩種主要形式：定群 (cohort) 生命表和現時 (current) 生命表。嚴格說來，定群生命表記錄特定的一群人從第一個人出生到最後一個人死去的實際死亡經歷。對於一個人群編制這樣的表當然有許多困難。給定人群中的成員可能有遷出和

漏計的死亡，而且一組已經死亡者的期望壽命只有歷史方面的價值。然而，定群生命表在研究動物群體方面確實有實際應用，甚至已經推廣到用來估計無生命對象諸如機器、電燈泡和其他機械製品的耐用性問題。改進的定群生命表已經應用於以人為對象的流行病學、社會學、醫學以及物理學研究。在治療有效性的研究中，分析病人存活的機會和時間長短已經擴充了生命表方法的應用。

顧名思義，現時生命表是從一個橫斷面來看當年這時間內一群人的死亡和生存經歷 (例如 1992 年台灣地區的人口)。它完全取決於編製一年中的年齡別死亡率。這種表以給定人口的實際死亡率為基礎，把每個人的一生投影到一個假設的定群中。例如，當我們說到當年生下的一個嬰兒的期望壽命時，我們假定這個嬰兒在其一生中都遵從當年資料中所呈現的年齡別死亡率。於是，現時生命表反映的是一年之中一群實際人口的死亡經歷。它是綜合一群實際人口死亡和生存經歷的最有效的工具，並且為統計推論奠定了基礎。現時生命表有助於比較國際間死亡資料以及評估各國之死亡率趨勢。

定群和現時生命表都有完全的和簡略的兩種。在完全生命表中，逐年計算各種函數；簡略生命表的年齡區間除第一年外均大於 1 年，典型的年齡區間是 0~1，1~5，5~10，10~15 等等。

改善生命數據的技巧是保險精算學家發展起來的，它包括修勻法和其他旨在削弱極端值影響的方法。雖然改善的技巧確有使數據光滑的優點，但是基於這種經過加工的信息所得的生命表函數較難進行統計推論。

利用死亡機率及年齡別死亡率之關係式建立生命表的方法有許多，如 King (1914)，Greville (1943)，Reed & Merrell (1939)，Keyfitz (1966)，Sirken (1964)，Coale & Demeny (1966) 及 Chiang (1960) 等，這些方法大都是非常複雜的數學公式，無法讓應用領域者能全然瞭解其真正涵義，且理論統計學家對此亦難有突破性的進展，Chiang (1960) 曾就此建立了生命表理論的架構。在其論文 (1972) 中，建議利用年齡區間存活成數 a_i 建立生命表。本研究乃將以蔣氏存活成數為基礎，利用內政部 (1994) 出版之台閩地區人口統計建立台灣地區之生命表。

貳．年齡別死亡率和死亡機率的關係

假設在年齡 x_i 時有 N_i 個人在年齡區間 $(x_i, x_i + n_i)$ 之死亡機率為 q_i，則

$$\hat{q}_i = \frac{D_i}{N_i} \qquad \textbf{(2.1)}$$

其中 D_i 為在 $(x_i, x_i + n_i)$ 時之總死亡人數。

特定年齡死亡率則是定義於 D_i 除以 N_i 個人在年齡區間 (x_i, x_i+n_i) 之總生存年數，D_i 個人中的每一個人死前在 (x_i, x_i+n_i) 中或多或少都貢獻了一個存活成數 a_i，所以他們共存活了 $a_i\, n_i\, D_i$ 年，而 $N_i - D_i$ 個存活者則貢獻了 $n_i\ (N_i - D_i)$ 年，所以死亡率公式如下：

$$M_i = \frac{D_i}{n_i(N_i - D_i) + a_i n_i D_i}$$

$$= \frac{\text{在區間}(x_i, x_i+n_i)\text{內死亡的人數}}{x_i\text{歲的人在區間}(x_i, x_i+n_i)\text{內活過的總人年數}} \qquad \textbf{(2.2)}$$

一般而言 (2.2) 式中之分母為年中人口數 P_i

所以

$$n_i(N_i - D_i) + a_i n_i D_i = P_i \qquad \textbf{(2.3)}$$

故

$$M_i = \frac{D_i}{P_i} \qquad \textbf{(2.4)}$$

N_i 可為

$$N_i = \frac{1}{n_i}[P_i + (1-a_i)n_i D_i] \qquad \textbf{(2.5)}$$

將 (2.5) 代入 (2.1) 且加入 (2.4)，吾等可得

$$\hat{q}_i = \frac{n_i M_i}{1+(1-a_i)n_i M_i} \qquad \textbf{(2.6)}$$

此即為死亡機率和年齡別死亡率之關係式，$\hat{q}_i$ 略小於死亡率 M_i 的 n_i 倍 [Chiang (9)]。

以下我們將以 (2.6) 式為基礎建立完全生命表。

參・完全生命表各行的說明及編製

一、完全生命表各行之說明

第 1 行　年齡區間 (x, x+1) 一除最後一個年齡區間 (如「85 或 85 以上」) 無末端外，這一行中的每一個區間都由 2 個確定的年齡值來定義。最後一個年齡區間的起點記為w。

第 2 行 X 歲時活著，而在 (x, x+1) 區間內死去的人數比例 $\hat{q}_x$ －每個 $\hat{q}_x$ 是一個 x 週歲的人在隨後的一年裏死去的機率的估計。這些比例數 $\hat{q}_x$ 是計算其他行數值的基本量。它們由現時人口的年齡別死亡率找出，所用公式將在下一節介紹。為了避免小數，有時把這些比例值表示為每 1000 人口的死亡數，這一行就相應地標記為「1000 $\hat{q}_x$」。

第 3 行 X 歲時活著的人數 l_x —這一行的第一個數 l_0 是任意的，稱為「基數」。後面的每一個數反映 l_0 個人當中 x 週歲時存活的人數。因此，這一行中的數值僅僅是在基數 l_0 的意義下考慮的，並不代表任何被觀察的人口。基數常取方便的數目，如 100000。表一說明，如果人們的死亡情形與 1992 年台灣地區人口的死亡情形相同，那麼出生時存活的 100000 人中將有 99439 人能活到第一次生日。

第 4 行 在區間 (x, x+1) 內死去的人數 d_x —這一行裏的值是 l_x 和 q_x 的乘積，因而依賴於基數 l_0。仍利用 1992 年台灣地區的資料，在 l_0=100000 個活產兒中，d_0=561 個將死於第 1 年內。但是 561 這個數本身並無意義，肯定不是 1992 年台灣地區發生的嬰兒死亡數。d_x 僅僅是生命表上年齡區間 (x, x+1) 內的死亡數。

l_x 和 d_x 行中的數字是由 $\hat{q}_0, \hat{q}_1, \Lambda, \hat{q}_w$ 和基數 l_0 利用下關係式來計算的，即

$$d_x = l_x \hat{q}_x, \quad x = 0,1,\Lambda, w \tag{3.1}$$

和

$$l_{x+1} = l_x - d_x, \quad x = 0,1,\Lambda, w-1 \tag{3.2}$$

從第一個年齡區間開始，我們對 x＝0 利用 (2.1) 式，得到死於區間 (0,1) 的人數 d_0，並對 x＝0 利用 (3.2) 式得到在這個區間末端存活的人數 l。根據 1 週歲時活著的人數 l_1，對 x＝1 利用 (3.1) 和 (3.2) 式得到與第二個區間相應的數值。用類似步驟可算出第 3、4 行中所有的數值。

第 5 行 死於 x 歲者在其生命最終一年內生存的時間佔全年的成數 a'_x —在 (x, x+1) 區間裏死去的 d_x 個人分別生活了 x 整年再加上 (x, x+1) 這一年的一部份 (即不足一年的一個分數)。這後一部份的平均值就是 a'_x，稱終壽年成數。這個數在編製生命表以及理論研究中都很重要。這一點將在下一節進一步解釋。

第 6 行　進入區間 (x, x＋1) 的所有人在該區間內存活年數 L_x—在區間 (x, x+1) 裏始終生存的每一個人各貢獻 1 年給 L_x，在區間 (x, x+1) 裏中途死去的每一個人，平均說來各貢獻 a'_x 年給 L_x，所以

$$L_x = (l_x - d_x) + a'_x d_x, \quad x = 0,1,\Lambda\ , w-1 \tag{3.3}$$

右側第一項是活到 x＋1 的 $(l_x - d_x)$ 個人在區間 (x, x+1) 裏存活的年數，第二項是中途死去的 d_x 個人在該區間裏存活的年數。當 a'_x 假定為 1/2 時 (對於 5 歲以上的區間常是這種情形)，上式就變成

$$L_x = l_x - \frac{1}{2} d_x \tag{3.4}$$

注意，L_x 之單位為「人－年」。

第 7 行　l_x 個人在 x 歲以後存活年數的總和 T_x—這個量是計算期望生命的基礎，它等於從 x 歲開始算這 l_x 個人在此後的各年齡區間裏存活年數的總和，即

$$T_x = L_x + L_{x+1} + \Lambda + L_w, \quad x = 0,1,\Lambda\ , w \tag{3.5}$$

在 T_x 與 T_{x+1} 之間顯然有關係：

$$T_x = L_x + T_{x+1} \tag{3.6}$$

第 8 行　x 歲時的期望生命 $\mathring{e}_x$ －這是一個 x 歲的人平均繼續生存的年數。因為 l_x 個人還能生存的總年數是 T_x，所以，期望生命就是

$$\mathring{e}_x = \frac{T_x}{l_x}, \quad x = 0,1,\Lambda\ , w \tag{3.7}$$

二、完全生命表之編製

編製現時生命表時，關鍵是由年齡別死亡率來估算相應的死亡機率。表中的其他量都可由第二節的公式來計算。

由年齡別死亡率推算死亡機率的過程中，最重要的概念是終壽年成數 a'_x。例如，一個人死於 30 歲，他生存了 30 年加上第 31 年的一部份，這後一部份用一個成數來表示。同齡死者的這種成數可以不同，其平均值記為 a'_x。x 表示最後一次生日時的歲數。假定在 30 歲零 1 個月、30 歲零 2 個月，…，乃至 30 歲零 11 個月死去的人數一樣多，那麼，這個平均成數為 1/2，換言之，假定死亡人數均勻分佈在一年中，a'_x＝1/2。關於這個成數，Chiang 等 (1961) 曾利用美國加州所搜集的 1960 年死亡資料和由美國國家衛生統計中心搜集的 1963 年全美國的資料做過分析。其結果顯

示明，4 歲以上成數 a'_x 不隨人種、性別和年齡而變，作 a'_x=0.5 的假定是可以的。然而，因為初生嬰兒死亡大都發生在出生後第 1 週，所以，對應於區間 (0,1) 的 a'_0 非常小。根據這些資料，提議如下的數值 a'_0=0.09， a'_1=0.43， a'_2=0.45， a'_3=0.47， a'_4=0.49，而對於 x ≧5，則 a'_x=0.50。其中除了 a'_0 之外，其餘之值均可適用於其他國家，而 a'_0 可由各國之衛生統計資料算出。有關台灣地區 a'_0 之計算見第四節 (三)。

為了能夠由各年齡 x 的死亡率計算死亡機率，我們需要尋求機率估計值 $\hat{q}_x$ 和年齡別死亡率 M_x 之間的關係式。對於 1 歲以後的年齡區間，這個關係式見於第二節的 (2.6)。對年齡區間 (x , x+1)，這個關係式是

$$\hat{q}_x = \frac{M_x}{1+(1-a'_x)M_x}, \quad x = 0,1,\Lambda\ ,w-1 \tag{3.8}$$

當年齡別死亡率M是由該年的死亡數 D_x 和年中人口數 P_x 來決定時,

$$M_x = \frac{D_x}{P_x}, \quad x = 0,1,\Lambda\ ,w-1 \tag{3.9}$$

機率的估計值 $\hat{q}_x$ 可由 (3.1) 式計算。

比值 d_x / L_x 是對應於年齡 x 的生命表上的死亡率。因為生命表完全是由現時人口的年齡別死亡率決定的，所以生命表上的死亡率必須和現時人口的死亡率一致，用記號表示便是

$$\frac{d_x}{L_x} = M_x = \frac{D_x}{P_x}, \qquad x = 0,1,\Lambda \tag{3.10}$$

為了證明 (3.10)，我們將 (3.3) 式代入比值 d_x / L_x，得到

$$\frac{d_x}{L_x} = \frac{d_x}{(l_x - d_x) + a'_x d_x}$$

分子、分母同被 l_x 除,

$$\frac{d_x}{L_x} = \frac{\hat{q}_x}{1-(1-a'_x)\hat{q}_x} \tag{3.11}$$

將 (3.8) 式代入 (3.11) 式，就得到 (3.10) 式。

生命表中最後的一個年齡區間是半開區間，諸如 85 歲和 85 歲以上。D_w， P_w， M_w， l_w， d_w 和 T_w 的數值都屬於w歲和w歲以上的半開區間；而 $\hat{q}_w$=1 (因為不能有永遠存活者)。區間長度是無限的，欲確定一個人在w歲以後平均活多長時間缺乏必要的信息。因此，我們不能用 (3.3) 式來推算 L_w。對 x=w，改寫 (3.10) 式的前半部，我們有

$$L_w = \frac{d_w}{M_w} \tag{3.12}$$

因為 x 歲時活著的 l_w 個人最終都要死去，$l_w = d_w$；由 (3.12) 式，我們有

$$L_w = \frac{l_w}{M_w} \tag{3.13}$$

這裏，活到w歲的人數 l_w 由前面的區間 (x_{w-1}, x_w) 決定，M_w 是現時人口中年齡區間 (w和w以上) 的死亡率。由於 1992 年之資料並非普查資料我們所計算之單一年齡簡易生命表 (表一) 則是根據內政部 (1994) 所編之「台閩地區簡易生命表」中之 q_i 值，並利用完全生命表之方法編製而成。在此要特別注意的是，該「台閩地區簡易生命表」中將 L_x 及 T_x 列為定常人口是不合理的，事實上二者應分別為「在年齡區間 (x_i, x_i+1) 內所有人之存活年數」及「x 歲以後之存活年數」，其單位為人—年。

表一　1992 年臺灣地區全人口單一年齡簡易生命表

年齡區間 (1)	區間(x_i, x_{i+1})內死亡機率 (2)	x_i 歲時存活人數 (3)	區間(x_i, x_{i+1})內死亡數 (4)	終壽區間成數 (5)	區間(x_i, x_{i+1})內生活時間 (6)	x_i 歲以後存活時間 (7)	x_i 歲時的平均壽命 (8)
(x_i, x_{i+1})	q_i	l_i	d_i	a_i	L_i	T_i	e_i
0-1	0.00561	100000	561	0.25	99579	7448071	74.48
1-2	0.00105	99439	104	0.43	99380	7348492	73.90
2-3	0.00077	99335	76	0.45	99293	7249112	72.98
3-4	0.00058	99259	58	0.47	99228	7149819	72.03
4-5	0.00042	99201	42	0.49	99180	7050591	71.07
5-6	0.00040	99159	40	0.50	99139	6951411	70.10
6-7	0.00038	99119	38	0.50	99100	6852272	69.13
7-8	0.00029	99081	29	0.50	99067	6753172	68.16
8-9	0.00030	99052	30	0.50	99037	6654105	67.18
9-10	0.00024	99022	24	0.50	99010	6555068	66.20
10-11	0.00027	98998	27	0.50	98985	6456058	65.21
11-12	0.00027	98971	27	0.50	98958	6357073	64.23
12-13	0.00028	98944	28	0.50	98930	6258115	63.25
13-14	0.00035	98916	35	0.50	98899	6159185	62.27
14-15	0.00052	98881	51	0.50	98856	6060286	61.29
15-16	0.00067	98830	66	0.50	98797	5961430	60.32
16-17	0.00086	98764	85	0.50	98722	5862633	59.36
17-18	0.00092	98679	91	0.50	98634	5763911	58.41
18-19	0.00109	98588	107	0.50	98535	5665277	57.46
19-20	0.00104	98481	102	0.50	98430	5566742	56.53
20-21	0.00086	98379	85	0.50	98337	5468312	55.58
21-22	0.00089	98294	87	0.50	98251	5369975	54.63
22-23	0.00114	98207	112	0.50	98151	5271724	53.68
23-24	0.00109	98095	107	0.50	98042	5173573	52.74
24-25	0.00108	97988	106	0.50	97935	5075531	51.80
25-26	0.00106	97882	104	0.50	97830	4977596	50.85
26-27	0.00116	97778	113	0.50	97722	4879766	49.91
27-28	0.00118	97665	115	0.50	97608	4782044	48.96
28-29	0.00121	97550	118	0.50	97491	4684436	48.02

29-30	0.00134	97432	131	0.50	97367	4586945	47.08
30-31	0.00141	97301	137	0.50	97233	4489578	46.14
31-32	0.00137	97164	133	0.50	97098	4392345	45.21
32-33	0.00136	97031	132	0.50	96965	4295247	44.27
33-34	0.00153	96899	148	0.50	96825	4198282	43.33
34-35	0.00166	96751	161	0.50	96671	4101457	42.39
35-36	0.00161	96590	156	0.50	96512	4004786	41.46
36-37	0.00184	96434	177	0.50	96346	3908274	40.53
37-38	0.00204	96257	196	0.50	96159	3811928	39.60
38-39	0.00196	96061	188	0.50	95967	3715769	38.68
39-40	0.00207	95873	198	0.50	95774	3619802	37.76
40-41	0.00254	95675	243	0.50	95554	3524028	36.83
41-42	0.00229	95432	219	0.50	95323	3428474	35.93
42-43	0.00293	95213	279	0.50	95074	3333151	35.01
43-44	0.00289	94934	274	0.50	94797	3238077	34.11
44-45	0.00313	94660	296	0.50	94512	3143280	33.21
45-46	0.00337	94364	318	0.50	94205	3048768	32.31
46-47	0.00342	94046	322	0.50	93885	2954563	31.42
47-48	0.00425	93724	398	0.50	93525	2860678	30.52
48-49	0.00450	93326	420	0.50	93116	2767153	29.65
49-50	0.00480	92906	446	0.50	92683	2674037	28.78
50-51	0.00483	92460	447	0.50	92237	2581354	27.92
51-52	0.00548	92013	504	0.50	91761	2489117	27.05
52-53	0.00591	91509	541	0.50	91239	2397356	26.20
53-54	0.00651	90968	592	0.50	90672	2306117	25.35
54-55	0.00696	90376	629	0.50	90062	2215445	24.51
55-56	0.00795	89747	713	0.50	89391	2125383	23.68
56-57	0.00802	89034	714	0.50	88677	2035992	22.87
57-58	0.00889	88320	785	0.50	87928	1947315	22.05
58-59	0.00990	87535	867	0.50	87102	1859387	21.24
59-60	0.01074	86668	931	0.50	86203	1772285	20.45
60-61	0.01271	85737	1090	0.50	85192	1686082	19.67
61-62	0.01249	84647	1057	0.50	84119	1600890	18.91
62-63	0.01460	83590	1220	0.50	82980	1516771	18.15
63-64	0.01577	82370	1299	0.50	81721	1433791	17.41
64-65	0.01704	81071	1381	0.50	80381	1352070	16.68
65-66	0.01857	79690	1480	0.50	78950	1271689	15.96
66-67	0.02023	78210	1582	0.50	77419	1192739	15.25
67-68	0.02260	76628	1732	0.50	75762	1115320	14.55
68-69	0.02569	74896	1924	0.50	73934	1039558	13.88
69-70	0.02660	72972	1941	0.50	72002	965624	13.23
70-71	0.03034	71031	2155	0.50	69954	893622	12.58
71-72	0.03433	68876	2365	0.50	67694	823668	11.96
72-73	0.03752	66511	2495	0.50	65264	755974	11.37
73-74	0.04204	64016	2691	0.50	62671	690710	10.79
74-75	0.04561	61325	2797	0.50	59927	628039	10.24
75-76	0.04958	58528	2902	0.50	57077	568112	9.71
76-77	0.05461	55626	3038	0.50	54107	511035	9.19
77-78	0.06248	52588	3286	0.50	50945	456928	8.69
78-79	0.06827	49302	3366	0.50	47619	405983	8.23
79-80	0.07525	45936	3457	0.50	44208	358364	7.80
80-81	0.07979	42479	3389	0.50	40785	314156	7.40
81-82	0.09022	39090	3527	0.50	37327	273371	6.99
82-83	0.09644	35563	3430	0.50	33848	236044	6.64
83-84	0.10874	32133	3494	0.50	30386	202196	6.29
84-85	0.12151	28639	3480	0.50	26899	171810	6.00
85+	1.00000	25159	25159	.	144911	144911	5.76

肆．簡易生命表的編製

具有 85 個年齡組的一個生命表不能提供簡明的輪廓。一個完全生命表中的大量訊息不易掌握，也不易消化。Major Greenwood 即確切地指出，「人類的腦子掌握大量繁瑣事物的本領是有限的。…試圖掌握每一點勢必什麼也掌握不了。」[Yule (1934)]。而且，對於一個群體來說長度為一歲的區間所需的資料常常不易獲得，有時即使能夠獲得，錯報年齡以及多報年齡也使得資料不甚可靠。還有，作為隨機事件，發生在一年之中的死亡數有很大變動。這些缺點可以藉編製簡易生命表來克服。

利用死亡機率及年齡別死亡率之關係式建立簡易生命表的方法有許多， 如 King (1914)，Greville (1943)，Reed & Merrell (1939)，Keyfitz (1966)，Sirken (1964)，Coale & Demeny (1966)。

這些方法大都是非常複雜的公式，無法讓應用領域者能全然瞭解其真正涵義，且理論統計學家對此亦難有突破性的進展，Chiang (1960a, 960b) 曾就此提供了生命表之理論架構。因此，Chiang (1972) 根據此一理論，建議利用年齡區間存活成數 a_i 建立生命表。我們將以上節之完全生命表為基礎，利用 a_i 來編製簡易生命表。

一、簡易生命表之公式

考慮 x 歲時活著的一個人和區間 (x_i, x_i+n_i)。設 μ(x)是 x 歲時的傷害函數 (hazard function)，這個人將在 (x_i, x_i+n_i) 區間裏死去的機率 q 為

$$q_i = 1 - \exp\{-\int_0^{n_i} \mu(x_i+\xi)d\xi\} \tag{4.1}$$

這個機率 q_i 也是一個 x 歲的人在區間 (x_i, x_i+n_i) 中的期望死亡數。此即是二項分佈隨機變數的期望值。

假設某人從 x_i 歲到 x_i+y 歲之存活機率為：

$$\exp\{-\int_0^{y} \mu(x_i+\xi)d\xi$$

則年齡區間 (x_i, x_i+n_i) 上的理論死亡率是一個人的期望死亡數 q_i 和他在這個區間裏生存的期望年數之比，或

$$m_i = \frac{q_i}{\int_0^{n_i} \exp\{-\int_0^{y} \mu(x_i+\xi)d\xi\}dy} \tag{4.2}$$

年齡別死亡率 m_i 和死亡機率 q_i 都是對 x_i 歲時活著的一個人來定義的。

設隨機變數 τ_i 是死亡區間 (x_i, x_i+n_i) 內的一個人在該區間裏活過的成數。當然，τ_i 是連續隨機變數，在 0 和 1 之間取值。τ_i 的期望值為 a_i，即

$$E[\tau_i]=a_i \tag{4.3}$$

對於每一個 t 值，$0 \leqq t \leqq 1$，τ_i 的機率密度函數為

$$g(t)dt=\frac{\{\exp[-\int_0^{n_i t}\mu(x_i+\xi)d\xi]\}\mu(x_i+n_i t)n_i dt}{q_i},\quad 0\le t\le 1 \tag{4.4}$$

(4.4) 式右側的量是死於區間 (x_i, x_i+n_i) 內的一個人死亡時間在 $(x_i+n_i t,\ x_i+n_i t+d(n_i t))$ 這個微小區間內的機率，也是 τ_i 取值於 (t,t+dt) 內的機率，即密度函數 g(t)dt。τ_i 的期望值可計算如下：

$$a_i=E[\tau_i]$$

$$=\int_0^1 tg(t)dt$$

$$=\frac{-n_i\exp\{-\int_0^{n_i}\mu(x_i+\xi)d\xi\}+\int_0^{n_i}\exp\{-\int_0^{y}\mu(x_i+\xi)d\xi\}dy}{n_i q_i} \tag{4.5}$$

將(4.1)和(4.2)式代入(4.5)中，可以得到

$$a_i=1-\frac{1}{q_i}+\frac{1}{n_i m_i} \tag{4.6}$$

由(4.6)式解出 q_i，便得到 q_i 和 m_i 之間的基本關係式

$$q_i=\frac{n_i m_i}{1+(1-a_i)n_i m_i} \tag{4.7}$$

(4.7)式與(2.6)式之意義相同。

二、簡易生命表之說明及編製

根據上述公式吾等可以建立一簡易生命表。

第 1 行　年齡區間 (x_i, x_{i+1})；

第 2 行　在區間 (x_i, x_{i+1}) 內死亡的機率 q_i；

第 3 行　x_i 歲時活著的人數 l_i；

第 4 行　死於區間 (x_i, x_{i+1}) 內的人數 d_i；

第 5 行　死於區間 (x_i, x_{i+1}) 內的一個人在該區間裏生存的時間佔區間全長的平均成數 a_i；

第 6 行　所有在區間 (x_i, x_{i+1}) 內生活過的人在該區間裏生活年數之和 L_i；

第 7 行　所有 x_i 歲的人在 x_i 之後生活年數的總和 T_i ；

第 8 行　x_i 歲時的期望壽命 $\mathring{e}_i$。

其中最重要的部分為第五行之說明，每個死於某區間的人在該區間裏生存的時間佔區間全長的平均成數。這個成數稱為終壽區間成數，記為 a_i，是完全生命表中終壽年成數 a'_x 的合理推廣。在下一節將有更進一步的討論。

編製一個現時人口的簡易生命表需預先做好兩項計算工作。首先是計算年齡別死亡率 M_i，利用公式

$$M_i = \frac{D_i}{P_i} \tag{4.8}$$

其中 D_i 和 P_i 分別是死亡數和區間 $(x_i, x_i + n_i)$ 上的年中人口。第二是計算死亡機率的估計值，利用公式

$$\hat{q}_i = \frac{n_i M_i}{1 + (1 - a_i) n_i M_i} \tag{4.9}$$

從 $\hat{q}_i$，a_i 和基數 l_0 開始，我們利用下列公式計算各列中的元素，

$$d_i = l_i \hat{q}_i, \quad i = 0,1,\Lambda\ ,w-1 \tag{4.10}$$

和

$$l_{i+1} = l_i - d_i, \quad i = 0,1,\Lambda\ ,w-1 \tag{4.11}$$

x_i 歲的 l_i 個存活者在區間 (x_i, x_{i+1}) 內生活的時間是

$$L_i = n_i(l_i - d_i) + a_i n_i d_i, \quad i = 0,1,\Lambda\ ,w-1 \tag{4.12}$$

生命表中最後的一個年齡區間是半開區間，諸如 85 歲和 85 歲以上。D_w，P_w，M_w，l_w，d_w 和 T_w 的數值都屬於 x_w 歲和 x_w 歲以上的半開區間；而 $\hat{q}_w$ =1 (因為不能有永遠存活者)。區間長度是無限的，欲確定一個人在 x_w 歲以後平均活多長時間缺乏必要的訊息。因此，我們不能用 (4.12) 式來確定 L_w，因為生命表是由現時人口的年齡別死亡率決定的，因此生命表上的死亡率必須和現時人口的死亡率一致，所以

$$\frac{d_x}{L_x} = M_x = \frac{D_x}{P_x}, \quad x = 0,1,\Lambda \tag{4.13}$$

對 x_w 歲改寫(4.4)式的前半部，我們有

$$L_w = \frac{D_w}{M_w} \tag{4.14}$$

因為 x_w 歲時活著的 l_w 個人最終都要死去， $l_w = d_w$ ；由(4.5)式，我們有

$$L_w = \frac{l_w}{M_w} \tag{4.15}$$

這裏，活到 x_w 歲的人數 l_w 由前面的區間 (x_{w-1}, x_w) 決定， M_w 是 x_w 歲和 x_w 歲以上者的年齡別死亡率。

l_i 個人在 x_i 歲以後繼續生活的總年數是

$$T = L_i + L_{i+1} + \Lambda + L_w, \quad i = 0,1,\Lambda\ ,w \tag{4.16}$$

所以， x_i 歲時的觀察期望壽命是比值

$$\mathring{e}_i = \frac{T_i}{l_i}, \quad i = 0,1,\Lambda\ ,w \tag{4.17}$$

以下，我們將以此為基礎利用台灣地區 1992 年人口資料 (內政部, 1994) 建立簡易生命表。

三、存活成數 a_i 之計算

(一) a_0 (0-1歲間存活成數) 之計算

表二　1992 年臺灣地區 a_0 的計算

死亡的年齡區間	區間的平均點(日)	全部人口		男性		女性	
		區間內的死亡數	生存時間(日)	區間內的死亡數	生存時間(日)	區間內的死亡數	生存時間(日)
0-1 日	0.5	176	88.0	100	50.0	76	38.0
1-2	1.5	52	78.0	37	55.5	15	22.5
2-3	2.5	25	62.5	15	37.5	10	25.0
3-4	3.5	29	101.5	18	63.0	11	38.5
4-5	4.5	29	130.5	17	76.5	12	54.0
5-6	5.5	10	55.0	8	44.0	2	11.0
6-13	9.5	119	1130.5	70	665.0	49	465.5
13-20	16.5	85	1402.5	54	891.0	31	511.5
20-27	23.5	64	1504.0	36	846.0	28	658.0
27-29	28.0	21	588.0	14	392.0	7	196.0
1-2 月	45.0	217	9765.0	116	5220.0	101	4545.0
2-3	73.0	189	13797.0	105	7665.0	84	6132.0
3-4	103.0	154	15862.0	100	10300.0	54	5562.0
4-5	134.0	115	15410.0	71	9514.0	44	5896.0
5-6	164.0	84	13776.0	49	8036.0	35	5740.0
6-7	195.0	70	13650.0	44	8580.0	26	5070.0
7-8	225.0	63	14175.0	35	7875.0	28	6300.0
8-9	256.0	49	12544.0	29	7424.0	20	5120.0
9-10	287.0	42	12054.0	17	4879.0	25	7175.0
10-11	318.0	40	12720.0	22	6996.0	18	5724.0
11-12	349.0	31	10819.0	15	5235.0	16	5584.0
總計		1664	149712.5	972	84844.5	692	64868

註：生存時間＝區間的平均點x區間內的死亡數

a_0 係數指死於第一年之初生嬰兒在該年中所貢獻的存活成數，表二即吾等根據八十一年衛生統計資料推算而得，再利用公式：

$$a_0 = \frac{\text{生存時間}}{365 \times (\text{年齡區間之死亡數})}，\text{求出：}$$

$$a_0(\text{兩性}) = \frac{149712.5}{365 \times 1664} = 0.25$$

$$a_0(\text{男性}) = \frac{84844.5}{365 \times 972} = 0.24$$

$$a_0(\text{女性}) = \frac{64868}{365 \times 692} = 0.26$$

(二)年齡區間 (1,5) 上 a_i 的計算

對於一周歲時（即區間 (1,5) 的起點）活著的一個人，有一個將死於區間 (1,2) 內的機率 q_1，將死於 (2,3) 內的機率 (1-q_1)q_2 ＝ $p_1\,q_2$，將死於 (3,4) 內的機率 $p_1\,p_2\,q_3$ 和將死於 (4,5) 內的機率 $p_1\,p_2\,p_3\,q_4$。他可能生存的時間分別等於 a_1'，(1+a_2')，(2+a_3') 和 (3+a_4')。例如，假定一個人死於區間 (2,3) 內，他在區間 (1,2) 上生存了一整年，並在區間 (2,3) 上生存了 a_2' 年。因此，他總共生存了 1+a_2' 年。一周歲的人在區間 (1,5) 內死去的機率總的來說是 1-$p_1\,p_2\,p_3\,p_4$，區間的長度為 5-1=4 年。因此，如果一個人死於 1 歲與 5 歲之間，他在區間 (1,5) 內生活的成數可由下式計算：

$$a_1 = \frac{q_1 a_1' + p_1 q_2 (1 + a_2') + p_1 p_2 q_3 (2 + a_3') + p_1 p_2 p_3 q_4 (3 + a_4')}{4(1 - p_1 p_2 p_3 p_4)} \qquad \textbf{(4.18)}$$

根據 Chiang (1984) 之建議，a_1'=0.43，a_2'=0.45，a_3'=0.47，a_4'=0.49，及完全生命表中 1 至 4 歲各年齡層之死亡機率，例如我們可以估計台灣地區 1992 年兩性之

$$a_1 = \frac{0.43\hat{q}_1 + 1.45\,\hat{p}_1\hat{q}_2 + 2.47\,\hat{p}_1\hat{p}_2\hat{q}_3 + 3.49\,\hat{p}_1\hat{p}_2\hat{p}_3\hat{q}_4}{4(1 - \hat{p}_1\hat{p}_2\hat{p}_3\hat{p}_4)} = 0.40 \qquad \textbf{(4.19)}$$

對任一國家，機率 $\hat{q}_1$，$\hat{q}_2$，$\hat{q}_3$，$\hat{q}_4$，可以確定區間 (1,5) 上的成數 a_1 就可由 (4.19) 式計算。

(三)五歲以上年齡區間 a_1 的計算

生命表中 5 歲以上每個有限區間的長度都是 5 年；每一年的存活成數都是 a'_x=0.5。這就簡化了區間 (x_i, x_i+5) 上成數 a_i 的公式。例如，對於年齡區間 (5,10)，我們有

$$a_5 = \frac{0.5\bar{q}_5 + (1+0.5)\bar{p}_5\bar{q}_6 + (2+0.5)\bar{p}_5\bar{p}_6\bar{q}_7 + (3+0.5)\bar{p}_5\bar{p}_6\bar{p}_7\bar{q}_8 + (4+0.5)\bar{p}_5\bar{p}_6\bar{p}_7\bar{p}_8\bar{q}_9}{5(1-\bar{p}_5\bar{p}_6\bar{p}_7\bar{p}_8\bar{p}_9)}$$

$$= \frac{\bar{p}_5\bar{p}_6 + 2\bar{p}_5\bar{p}_6\bar{p}_7 + 3\bar{p}_5\bar{p}_6\bar{p}_7\bar{p}_8 + 4\bar{p}_5\bar{p}_6\bar{p}_7\bar{p}_8\bar{p}_9}{5-(1-\bar{p}_5\bar{p}_6\bar{p}_7\bar{p}_8\bar{p}_9)} + \frac{1}{10} \qquad \textbf{(4.20)}$$

因為

$$\bar{q}_5 + \bar{p}_5\bar{q}_6 + \bar{p}_5\bar{p}_6\bar{q}_7 + \bar{p}_5\bar{p}_6\bar{p}_7\bar{q}_8 + \bar{p}_5\bar{p}_6\bar{p}_7\bar{p}_8\bar{q}_9 = 1 - \bar{p}_5\bar{p}_6\bar{p}_7\bar{p}_8\bar{p}_9 \qquad \textbf{(4.21)}$$

利用公式 (4.19) 和 (4.20)，我們計算了台灣地區 1992 年之簡易生命表中 a_i 的數值。這些 a_i 的數值可直接用於編製簡易生命表 (表三　表五)。

Chiang (1984) 指出，機率 $\bar{q}_x$ 和 $\bar{p}_x$ 是根據人口群體的死亡資料計算的，a_i 的值就反映該人口每個區間上呈現的死亡形式，因為死亡模式隨時間變化不大 (雖然死亡率變動較大)，a_i 值可看成常數，並用來編製該人口在以後年份的簡易生命表 y。

表三　1992 年臺灣地區全人口簡易生命表的編製

年齡區間	區間(x_i, x_{i+1})內年中人口數	區間(x_i, x_{i+1})內死亡數	年齡別死亡率	終壽區間成數	區間(x_i, x_{i+1})內死亡機率
(x_i, x_{i+1})	P_i	D_i	M_i	a_i	q_i
0-1	307460	1732	0.005633	0.25	0.00561
1-5	1315071	928	0.000706	0.40	0.00282
5-10	1746175	552	0.000316	0.45	0.00158
10-15	2010567	680	0.000338	0.57	0.00169
15-20	1846710	1680	0.000910	0.54	0.00454
20-25	1862446	1887	0.001013	0.52	0.00505
25-30	1946800	2324	0.001194	0.52	0.00595
30-35	1903692	2789	0.001465	0.52	0.00730
35-40	1731819	3293	0.001901	0.52	0.00946
40-45	1354827	3686	0.002721	0.52	0.01352
45-50	878245	3588	0.004085	0.54	0.02023
50-55	875571	5191	0.005929	0.53	0.02924
55-60	762818	6951	0.009112	0.53	0.04460
60-65	736398	10737	0.014580	0.53	0.07048
65-70	581251	13169	0.022656	0.53	0.10755
70-75	386959	14638	0.037828	0.53	0.17370
75-80	234758	14784	0.062975	0.52	0.27353
80-85	117778	11821	0.100367	0.50	0.40117
85+	55323	9605	0.173617	.	1.00000

年齡區間 (1)	區間(x_i , x_{i+1}) 內死亡機率 (2)	x_i 歲時存活人數 (3)	區間(x_i , x_{i+1}) 內死亡數 (4)	終壽區間成數 (5)	區間(x_i , x_{i+1}) 內生活時間 (6)	x_i 歲以後存活時間 (7)	x_i 歲時的平均壽命 (8)
(x_i , x_{i+1})	q_i	l_i	d_i	a_i	L_i	T_i	e_i
0-1	0.00561	100000	561	0.25	99579	7455867	74.56
1-5	0.00282	99439	280	0.40	397084	7356288	73.98
5-10	0.00158	99159	157	0.45	495363	6959204	70.18
10-15	0.00169	99002	167	0.57	494651	6463841	65.29
15-20	0.00454	98835	449	0.54	493142	5969190	60.40
20-25	0.00505	98386	497	0.52	490737	5476048	55.66
25-30	0.00595	97889	582	0.52	488048	4985311	50.93
30-35	0.00730	97307	710	0.52	484831	4497263	46.22
35-40	0.00946	96597	914	0.52	480791	4012432	41.54
40-45	0.01352	95683	1294	0.52	475309	3531641	36.91
45-50	0.02023	94389	1909	0.54	467554	3056332	32.38
50-55	0.02924	92480	2704	0.53	456046	2588778	27.99
55-60	0.04460	89776	4004	0.53	439471	2132732	23.76
60-65	0.07048	85772	6045	0.53	414654	1693261	19.74
65-70	0.10755	79727	8575	0.53	378484	1278607	16.04
70-75	0.17370	71152	12359	0.53	326716	900123	12.65
75-80	0.27353	58793	16082	0.52	255368	573407	9.75
80-85	0.40117	42711	17134	0.50	170720	318039	7.45
85+	1.00000	25577	25577	.	147319	147319	5.76

表四　1992 年臺灣地區男性人口簡易生命表的編製

年齡區間	區間(x_i , x_{i+1})內年中人口數	區間(x_i , x_{i+1})內死亡數	年齡別死亡率	終壽區間成數	區間(x_i , x_{i+1})內死亡機率
(x_i , x_{i+1})	P_i	D_i	M_i	a_i	q_i
0-1	160426	1016	0.006333	0.24	0.00630
1-5	683727	524	0.000766	0.41	0.00306
5-10	900756	315	0.000350	0.45	0.00175
10-15	1035162	419	0.000405	0.58	0.00202
15-20	946146	1234	0.001304	0.55	0.00650
20-25	954090	1379	0.001445	0.53	0.00720
25-30	996590	1708	0.001714	0.52	0.00853
30-35	972630	2020	0.002077	0.51	0.01033
35-40	883929	2364	0.002674	0.52	0.01328
40-45	691960	2605	0.003765	0.52	0.01866
45-50	446548	2456	0.005500	0.54	0.02716
50-55	439645	3503	0.007968	0.53	0.03911
55-60	388741	4652	0.011967	0.53	0.05820
60-65	417404	7423	0.017784	0.52	0.08528
65-70	334826	8820	0.026342	0.52	0.12388
70-75	211938	9098	0.042928	0.52	0.19459
75-80	121229	8335	0.068754	0.51	0.29421
80-85	53747	5831	0.108490	0.49	0.42490
85+	22004	3946	0.179331	.	1.00000

年齡區間 (1)	區間(x_i , x_{i+1})內死亡機率 (2)	x_i 歲時存活人數 (3)	區間(x_i , x_{i+1})內死亡數 (4)	終壽區間成數 (5)	區間(x_i , x_{i+1})內生活時間 (6)	x_i 歲以後存活時間 (7)	x_i 歲時的平均壽命 (8)
(x_i , x_{i+1})	q_i	l_i	d_i	a_i	L_i	T_i	e_i
0-1	0.00630	100000	630	0.24	99521	7216738	72.17
1-5	0.00306	99370	304	0.41	396763	7117217	71.62
5-10	0.00175	99066	173	0.45	494854	6720454	67.84
10-15	0.00202	98893	200	0.58	494045	6225600	62.95
15-20	0.00650	98693	642	0.55	492021	5731555	58.07
20-25	0.00720	98051	706	0.53	488596	5239534	53.44
25-30	0.00853	97345	830	0.52	484733	4750938	48.81
30-35	0.01033	96515	997	0.51	480132	4266205	44.20
35-40	0.01328	95518	1268	0.52	474547	3786073	39.64
40-45	0.01866	94250	1759	0.52	467028	3311526	35.14
45-50	0.02716	92491	2512	0.54	456677	2844498	30.75
50-55	0.03911	89979	3519	0.53	441625	2387821	26.54
55-60	0.05820	86460	5032	0.53	420475	1946196	22.51
60-65	0.08528	81428	6944	0.52	390474	1525721	18.74
65-70	0.12388	74484	9227	0.52	350275	1135247	15.24
70-75	0.19459	65257	12698	0.52	295810	784972	12.03
75-80	0.29421	52559	15463	0.51	224911	489162	9.31
80-85	0.42490	37096	15762	0.49	145287	264251	7.12
85+	1.00000	21334	21334	.	118964	118964	5.58

表五　1992 年臺灣地區女性人口簡易生命表的編製

年齡區間	區間(x_i , x_{i+1})內年中人口數	區間(x_i , x_{i+1})內死亡數	年齡別死亡率	終壽區間成數	區間(x_i , x_{i+1})內死亡機率
(x_i , x_{i+1})	P_i	D_i	M_i	a_i	q_i
0-1	147034	716	0.004870	0.26	0.00485
1-5	631344	404	0.000640	0.39	0.00256
5-10	845419	237	0.000280	0.45	0.00140
10-15	975405	261	0.000268	0.54	0.00134
15-20	900564	446	0.000495	0.52	0.00247
20-25	908356	508	0.000559	0.51	0.00279
25-30	950210	616	0.000648	0.51	0.00323
30-35	931062	769	0.000826	0.53	0.00412
35-40	847890	929	0.001096	0.52	0.00547
40-45	662867	1081	0.001631	0.54	0.00812
45-50	431697	1132	0.002622	0.54	0.01303
50-55	435926	1688	0.003872	0.54	0.01919
55-60	374077	2299	0.006146	0.52	0.03028
60-65	318994	3314	0.010389	0.54	0.05073
65-70	246425	4349	0.017648	0.54	0.08480
70-75	175021	5540	0.031653	0.53	0.14731
75-80	113529	6449	0.056805	0.53	0.25058
80-85	64031	5990	0.093548	0.51	0.38053
85+	33319	5659	0.169843	.	1.00000

年齡區間 (1)	區間(x_i, x_{i+1})內死亡機率 (2)	x_i 歲時存活人數 (3)	區間(x_i, x_{i+1})內死亡數 (4)	終壽區間成數 (5)	區間(x_i, x_{i+1})內生活時間 (6)	x_i 歲以後存活時間 (7)	x_i 歲時的平均壽命 (8)
(x_i, x_{i+1})	q_i	l_i	d_i	a_i	L_i	T_i	e_i
0-1	0.00485	100000	485	0.26	99641	7743775	77.44
1-5	0.00256	99515	255	0.39	397438	7644134	76.81
5-10	0.00140	99260	139	0.45	495918	7246696	73.01
10-15	0.00134	99121	133	0.54	495299	6750778	68.11
15-20	0.00247	98988	245	0.52	494352	6255479	63.19
20-25	0.00279	98743	275	0.51	493041	5761127	58.34
25-30	0.00323	98468	318	0.51	491561	5268086	53.50
30-35	0.00412	98150	404	0.53	489801	4776525	48.67
35-40	0.00547	97746	535	0.52	487446	4286724	43.86
40-45	0.00812	97211	789	0.54	484240	3799278	39.08
45-50	0.01303	96422	1256	0.54	479221	3315038	34.38
50-55	0.01919	95166	1826	0.54	471630	2835817	29.80
55-60	0.03028	93340	2826	0.52	459918	2364187	25.33
60-65	0.05073	90514	4592	0.54	442008	1904269	21.04
65-70	0.08480	85922	7286	0.54	412852	1462261	17.02
70-75	0.14731	78636	11584	0.53	365958	1049409	13.35
75-80	0.25058	67052	16802	0.53	295775	683451	10.19
80-85	0.38053	50250	19122	0.51	204401	387676	7.71
85+	1.00000	31128	31128	.	183275	183275	5.89

伍．蔣氏生命表和幾種生命表之比較

以下我們將比較一些生命表計算方法和蔣氏生命表之差異：

Reed 和 Merrell (1939) 利用以下公式來計算生命表

$$q_i = 1 - \exp[-nM_i - an_i^3 M_i^3] \quad \textbf{(5.1)}$$

其中 a 為一常數， n 為年齡區間長度， M_i 為年齡區間 (x_i, x_{i+1}) 之年齡別死亡率，他們利用美國 1910 年之人口普查資料算出 $a = 0.008$ 做為推算生命表之基準。

因此在 $n = 5$ 時

$$q_i = 1 - \exp[-M_i(5 + M_i)] \quad \textbf{(5.2)}$$

即可很容易地算出。

同時，他們也根據美國 1900 到 1930 年間的 24 個生命表，利用存活人數 l_i 確定 0 到 10 歲之 L_i，公式如下：

$$L_i = Al_0 + Bl_i + Cl_{i+n} \tag{5.3}$$

其中，$A + B + C = n$，

此係根據以往 30 年的資料配適算出 A、B、C 值而建立。

至於 10 歲以後，其 L_i 值是利用 T_i 值之差異而得，其公式如下：

若年齡區間 5 年，則

$$T_i = 0.20833l_i + 2.5l_i + 0.20833l_i + 5\sum_i l_i \tag{5.4}$$

若年齡區間 10 年，則

$$T_i = 4.166667l_i + 0.83333l_{i+1} + 10\sum_i l_i \tag{5.5}$$

Keyfitz 及 Frauenthal (1975) 以年齡別死亡率 $M_i = \dfrac{\int_{x_i}^{x_{i+1}} p(a)h(a)da}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} p(a)da}$ 為基礎 (其中 $p(a)$ 為年齡 a 之人數，$h(a)$ 為在年齡 a 之死亡力)，推導出以下公式：

$$q_i = 1 - \exp[-5(M_i + C)] \tag{5.6}$$

$$C = \frac{(P_{i-1} - P_i)(M_{i+1} - M_{i-1})}{48P_i} \tag{5.7}$$

P_i 為年齡區間 (x_i, x_{i+1}) 之人數。

其

$$L_i = \frac{n(l_i - l_{i+1})}{l_n l_i - l_n l_{i+1}}\left[1 + (\frac{n}{24})(M_{i+1} - M_{i-1})\right] \tag{5.8}$$

事實上，Reed-Merrell 公式為 Keyfitz-Frauenthal 公式之特殊形式。

Greville (1943) 建議利用以下公式將年齡別死亡率之轉變成生命表死亡機率，其公式如下：

$$q_i = \frac{M_i}{(\frac{1}{n}) + M_i[(\frac{1}{2}) + (\frac{n}{12})(M_i - k)]} \tag{5.9}$$

k 值可能因生命表之不同而有些微差別，惟其認為 $k = 0.09$ 為一合理假設。

Chiang 之公式為

$$q_i = \frac{n_i M_i}{1 + (1 - a_i) n_i M_i} \quad \textbf{(4.7)}$$

$$L_i = n_i l_{i+1} + n_i a_i d_i \quad \textbf{(4.12)}$$

其中只要能算出各年齡區間之 a_i 值，則生命表即很快可以得之，而 Chiang (1984) 亦指出 a_i 值相當的穩定，不必每年修正，因此根據 a_i 和 (4.7)、(4.12) 即可推算出生命表。

比較此三種方法，吾等可根據下表[Namboodiri and Suchindran (1987)]：

x	P_x	M_x
60	4192000	0.027483
65	3294000	0.039958
70	2330000	0.059770

利用 Keyfitz-Frauenthal 公式算出 C=0.0003802

$$q_{65} = 1 - \exp[-5(0.039958 + 0.0003802)] = 0.18265$$

Reed-Merrel 公式

$$q_{65} = 1 - \exp[-0.039958(5 + 0.039958)] = 0.182404$$

Greville 之公式

$$q_{65} = \frac{0.039958}{0.2 + 0.039958[0.5 + (0.416667)(0.039958 - 0.09)]} = 0.18234$$

Chiang 之公式

$$q_{65} = \frac{5(0.039958)}{1 + (1 - 0.52)(5)(0.039958)} = 0.182307$$

其中 ${}_5a_{65} = 0.52$ 係取自 Chiang (1972)

以上四種方法所算出之死亡機率都相當接近。

Chiang 所推導之理論上的年齡別死亡率和死亡率間的關係，其數學內涵雖稍嫌複雜，但道理則很簡單，且由其間所推導出之 a_i 雖然有複雜的形式，但經整理後，

則為一相當簡單的公式 (4.6)。而 Reed-Merrell 及 Keyfitz-Frauenthal 之方法計算公式頗為繁複，並不能讓應用領域者能全然瞭解其真正涵義，事實上從 L_i 的公式[見 (5.3)，(5.8) 及 (4.12)] 即可看出，因此 Chiang 之方法具有簡捷、易於瞭解且可應用於統計推論之優點，值得推廣。至於內政部編製之簡易生命表主要是根據 Greville (1943) 之方法，並參採日本厚生省統計調查部簡略生命表編算方法，利用對各年齡層死亡機率之插補、補整而求得，其為相當細膩且繁複的計算過程，讀者有興趣可參閱內政部所編撰之「台閩地區簡易生命表」(1994)。

陸．結語

生命表發展至今已有一、二百年的歷史，其方法有許多，經過不斷地改進，每種方法都有其正面之貢獻，但大都公式繁複且有時讓人無法全然瞭解其涵義，Chiang (1972) 提供了一簡捷的方法來建立生命表，並利用隨機過程的理念給了其理論基礎，在其著書中 (1984) 則有相當詳細的說明。其中最重要的莫過於對終壽年齡區間存活成數 a_i 的理論作了詳盡的討論，另外也對生命表的元素，如死亡率、死亡機率、平均餘命等建立了統計推論的基礎。

事實上有些簡易生命表的編製皆是基於經驗而來，最常見的就是利用

$$\hat{q}_i = \frac{2 n_i m_i}{2 + n_i m_i}$$

此即是 a_i＝0.5，此一方式並不合理，Chiang (1984) 曾舉例說明簡易生命表中年齡區間 (x_i, x_{i+1}) 內每年的 a'_x=0.5 並不意謂整個區間的 a_i=0.5，當死亡率在一個區間裏隨年齡而增加時，成數 a_i>0.5，反之則 a_i<0.5。

我國每十年舉行一次的戶口普查，可以得到相當詳細的資料來建立完全生命表，再藉此推算出簡易生命表中之 a_i 值，根據 Chiang (1984) 指出，機率 $\hat{q}_x$ 和 $\hat{p}_x$ 是根據人口群體的死亡資料計算的，a_i 的值就反映該人口每個區間上呈現的死亡形式，因為死亡模式隨時間變化不大 (雖然死亡率變動較大)，a_i 值可看成常數，並用來編製該人口在以後年份的簡易生命表。由於 a_i 值非常的穩定，不會隨時間而變化，因此可以每十年修正一次。

本文並就蔣氏之方法與 Reed-Merrell，Keyfitz-Frauenthal 及 Greville 等方法做了一些比較，發現其結果差異很小。若以蔣氏之生命表和內政部編印之簡易生命表 (1994) 相較，表三　表五在各年齡之平均餘命較之高 0.2　0.5 年，差距有限。惟內政部之生命表主要係根據 Greville (1943) 之方法，並參採日本厚生省統計室簡略生命表編算方法，雖然他們利用插補法 (extropolation)，有使數據光滑的特點，但此種

生命表函數較難進行統計推論，而且其計算複雜不易瞭解，而 Chiang 所建立之生命表可用於統計推論且計算方法相當簡捷，值得加以推廣。

最後，我們應特別注意的是內政部所編之「台閩地區簡易生命表」(1994) 中將 L_x 及 T_x 列為定常人口是不合理的，事實上二者應分別為「在年齡區間 (x_i, x_{i+1}) 內所有人之存活年數」及「x_i 歲以後之存活年數」，其單位為人－年，此一觀念有必要澄清。

參考文獻

內政部，「民國八十一年台閩地區人口統計表」，內政部編印，1994 年。

內政部，「台閩地區簡易生命表」，內政部統計處編印，1994。

Chiang, C.L., "A Stochastic Study of the Life Table and Its Applications: Ⅱ. Sample Variance of the Observed Expectation of Life and Other Biometric Functions", *Human Biology*, (32), 1960a, pp.221-38.

Chiang, C.L., "A Stochastic Study of the Life Table and Its Applications: Ⅰ. Probability Distributions of the Biometrics Functions", *Biometrics*, (16), 1960a, pp.618-5.

Chiang, C.L., "On Constructing Current Life Tables", *Journal of American Statistical Association*, (67), 1972, pp.538-541.

Chiang, C.L., *The Life Table and Its Applications*. Florida: Robert E. Krieger, Inc, 1984.

Chiang, C.L., Norris, F.D., Olsen, F., Shipley, P.W., and Supplee, H.E., *Determination of the Fraction of Last Year of Life and Its Variation by Age, Race, and Sex*, Unpublished manuscript presented at the Annual Meeting of the American Public Health Association, Detroit, Michigan, 1961.

Coale, A.J. and Demeny, P., *Regional Life and Stable Populations*, New Jersey: Princeton University Press, 1966.

Greville, T.N.E., "Short Methods of Constructing Abridged Life Tables", *Record of American Institute of Actuaries*, (32), 1943, pp.29-43.

Keyfitz, N., "A Life Table That Agrees with the Data", *Journal of American Statistical Association*, (61), 1966, PP.305-11.

Keyfitz, N., and Frauenthal, J., "An Improved Life Table Method", *Biometrics*, (31), 1975, pp.889-899.

King, G., "On a Short Method of Constructing an Abridged Mortality Table", *Journal of the Institute of Actuaries*, (48), 1914, pp.294.

Namboodiri, K., and Suchindran, C. M., "Life Table Techniques and Their Applications", Florida: Academic Press Inc, 1987.

Reed, J.L., and Merrell, M., "A Short Method of Constructing an Abridged Life Table", *American Journal of Hygiene*, (30), 1939, pp.33-62.

Sirken, M., "Comparison of Two Methods of Constructing Abridged Life Tables", *Vital and Health Statistics*, (4), 1964, pp.1-11.

Yule, G.U., "On some points relating to vital statistics, more especially statistics of occupational mortality", *Journal of Royal Statistical Association*, (97), 1934, pp.1-84.

On Constructing the Life Table of Taiwan Area -the Application of Chiang's Fraction of Last Age Interval of Life

CHENG-HSIANG LIN

Department of Statistics, Tunghai University

ABSTRACT

Although there is no theoretical basis, the life table have been developed for a long time. Due primarily to the work of health statisticians in medical follow-up studies in the early 1950's, the life table has begun to attract the attention of statisticians. But it was advanced in probability and statistical theory that made it possible to address the life table from a purely stochastic point of view and to provide the subject with the theoretical foundation. Chiang (1984) presented both the theory and application of life table methodology from a statistical perspective. He introduced the fraction of the last age interval of life into life table with theoretical foundation. In this paper, we are trying to apply Chiang's concept to the mortality data in Taiwan area on contracting the life table. Chiang's fraction represents the mortality pattern prevailing in the population in each interval. Since the mortality pattern hardly varies over time (although death ratios do), the fraction may be regarded as a constant and used for construction of abridged life tables of subsequent years of the population. It can be revised by 10 years. Also, we compare the difference among Chiang‘s Life Table and other Life Tables and find their estimated probability dying in interval come very close.

Keywords: the fraction of last age interval of life, complete life table, abridged life table.