

最佳增量節線理論及其應用

賀力行* 許慶基* 李青峰**

*中華大學工業管理學系

**中華大學工業工程與管理研究所

(收稿日期：88 年 2 月 24 日；第一次修正：88 年 5 月 19 日；
接受刊登日期：88 年 8 月 9 日)

摘要

所謂最佳增量節線，乃是在流量的網路模式中，如何搜尋關鍵的節線，以求同時擴增數條關鍵節線之容量，將網路的最大流量增加最多。

本研究以最大流量等於最小切割定理為理論基礎，發展搜尋最佳增量節線之演算法，並建立最佳增量節線演算法的說明範例與計算機程式模組。

此外，對以最佳增量節線理論之應用，首先界定最佳增量節線理論應用於實際問題之前提假設，再提出如何將實際問題轉換為抽象網路問題之方法與說明，並闡明如何以最佳增量節線理論求解實際工廠機台排程與物流配送管理之最大流量問題，同時就最佳增量節線理論與限制理論做一通盤比較。最後，以整體資源配置最佳化的觀點，提供管理者實際決策時所需的資訊與建議。

關鍵詞彙：網路理論，最大流量，最佳增量節線，限制理論

壹 前言

網路理論於實際應用上，常將實際的問題轉換為抽象之網路問題，再運用特殊的網路模型來求解。最大流量問題是網路理論中基本的問題之一，主要在於評估網路的最大流量。當決策者認為目前網路所能提供的最大流量不能滿足實際需求時，如何搜尋關鍵節線並擴增其節線容量，方能使網路的最大流量提昇最多以滿足需求，此為本研究之主題最佳增量節線問題。

在理論探討上，本研究以最大流量等於最小切割定理為基礎，進行最佳增量節線之理論探討，並發展搜尋最佳增量節線的實用演算法。同時，建立演算法的說明範例與計算機程式模組加以驗證。

在最佳增量節線理論的探討過程中，發現最佳增量節線理論與限制理論存有若干相似之處。限制理論的基本精神認為系統皆存在某些限制阻礙其達成最佳化，欲達到最佳化目標則必須針對系統的限制加以改善。以此觀點，將限

*感謝行政院國家科學委員會提供財務支援，計畫編號：NSC 86-2213-E-216-005

制理論納入本研究的探討範圍，進行最佳增量節線理論與限制理論在網路最大流量問題中之比較與探討。

關於最佳增量節線理論於實際決策應用方面。首先，界定最佳增量節線理論應用之假設條件。其次，說明如何將實際的工廠機台排程問題及物流配銷問題轉換為抽象的網路問題，並藉由網路的轉化處理來評估實際網路最大流量狀況。假如，此網路最大流量不能滿足決策目標，則可運用最佳增量節線理論來改善網路最大流量。最後透過範例的建立，以整體資源配置之觀點，提供下列資訊與建議作為實際決策依循。

1.在現有的資源配置下，評估網路的最大流量與各節線的實際流量

最佳增量節線理論可以在規劃的階段，根據預估投入的資源配置來決定各節線的容量，評估網路最大流量與各節線的實際流量。

2.搜尋網路的最佳增量節線與增量節線的改善量

提供決策者在改善網路最大流量問題時，如何搜尋使網路最大流量提昇最多的增量節線，並決定改善多少單位的節線容量。

3.節線資源配置表

根據節線資源配置表，可作為各節線資源的績效評估與整體資源配置的參考，優先將資源使用效率較低的節線資源指派到增量節線上，並提供達成實際決策目標所需的改善方案。

貳 文獻回顧

一、最佳增量節線理論回顧

關於最佳增量節線之研究，賀力行、許慶基、張靖 [3,14,15] 對搜尋最佳單一增量節線有深入的探討。同時亦明確指出對於平面無方向性之網路中，最佳增量節線問題可轉換為最關鍵節線問題 (The most vital link problem)。對於最關鍵節線問題沙永傑[5]曾有深入的探討，並提出單一與多關鍵節線的演算法。此外，Ball, Golden & Vohra [4]亦有提出探討最佳關鍵節線有效率之演算法。

對於最佳增量節線的演算法，本研究提出較[14]快速有效之演算法，並以計算機程式實際驗證新演算法之有效性。

二、限制理論簡介

近年來受到企業界所歡迎的新興管理哲學-限制理論，為 Eliyahu Moshe Goldratt [11,12,13] 博士在 1986 年所提出。限制理論的基本精神認為，任何系統皆存在限制系統追求最佳化的機制，因此決策者的首要目標在針對限制因素做管理與改善。

限制理論落實在實際問題的管理與改善方面，依限制因素的性質可分為以下兩類方法 [11,12,13]：

1. 解決政策 (Policy) 限制的問題：此類限制因素的產生來自於組織的制度或決策者的思維所致，Goldratt 提出解決此類問題的三個步驟與解決的技巧 [1,2]：

步驟一：要改變什麼 (What to Change ?)

可使用果因果 (Effect-Cause-Effect) 法或現況樹 (Current Reality Tree) 的方法，來定義組織真正的核心問題與問題間的相互關係。

步驟二：改變成什麼 (To What to Change ?)

可使用撥雲見日 (Evaporating Cloud) 法與未來樹 (Future Reality Tree) 的方法，尋找組織未來成長的空間與方向。不但可以凝聚組織成員的共識，並可以降低來自於組織的改革阻力。

步驟三：如何改變 (How to Make It Happen?)

可使用條件樹 (Prerequisite Tree) 的方法，來定義組織改革所應克服的阻礙或必須先具備之條件。再使用轉換樹 (Transition Tree) 法將原先的可行路徑轉換為較小阻力的路徑，並建立執行的步驟。

2. 解決實體 (Physical) 限制問題：此類限制因素的產生，是由原物料供給限制、製造產能限制以及市場需求限制等實際的限制所造成，Goldratt 提出解決此類問題的五個步驟為：

步驟一：確認系統的“限制”所在。

步驟二：決定如何充分利用“限制”。

步驟三：儘全力配合步驟二所做之決策。

步驟四：打破系統的“限制”。

步驟五：假如“限制”在步驟四被打破，則重回到步驟一，不要讓“惰性”成為系統的限制。

運用限制理論求解最大流量的網路問題，可根據 Goldratt 提出解決實體限制因素的改善步驟來處理。步驟一，搜尋能使網路最大流量提昇最多的關鍵節線。步驟二，充分利用該關鍵節線之容量。步驟三，其餘非關鍵節線儘全力配合步驟二所做之決策。步驟四，擴增網路中關鍵節線之容量。步驟五，若系統限制被打破，則應重新回到步驟一，再確認新系統的限制所在，即為再求解修正後網路最大流量之關鍵節線。

三、最佳增量節線理論與限制理論之比較

在 1993 年，Lee & Plenert [20] 提出線性規劃理論¹ 與限制理論之間的比較。認為在單一的限制條件下，線性規劃理論與限制理論可獲致相同的結論。但是當有新的 (或第二個) 限制因素加入時，線性規劃理論有較限制理論為佳的結論。

在最大流量的網路問題中，限制理論找尋系統限制的觀念，猶如最佳增量節線理論搜尋關鍵節線一般，利用最佳單一增量節線演算法來尋找限制理論中的系統限制，所以最佳單一增量節線理論與限制理論可獲致相同的結果。若允許同時擴增 2 條節線容量，最佳增量節線理論的處理方式是使用最佳 2 增量節線演算法來處理問題 而限制理論的處理方式則必須受限於前一次所做的改善方案，重複計算最佳單一增量節線演算法 2 次的方式來處理問題。

本研究認為限制理論所採行逐步改善的方法 (改善步驟四打破“限制”後，重新回到步驟一再確認系統的“限制”所在)，其本身亦為另一種形式的限制條件 (受限於前一次的改善方案)，可能因此無法找到更好的改善方案。最佳增量節線理論則可以不受逐步改善的限制，以整體性的觀點來解決問題，本研究將在 伍-二-(三) 與 伍-三-(三) 的決策分析與建議中，對於最佳增量節線理論與限制理論之差異加以探討。

參 理論探討

一、最大流量理論回顧

所謂最大流量問題[6,7,18]，在探討由節點集合 N (Nodes) 與節線集合 A (Arcs) 所構成網路圖形 G (Graph) 中，計算從產生點 s (Source) 到集結點 t (Sink) 的網路最大流量。

¹ 最佳增量節線理論在討論線性的限制因素下，追求目標函數的極大化

令 z 代表網路中從產生點 s 到集結點 t 之網路流量，則最大流量問題的數學模式可表示如式 (1) 所示：

$$\begin{aligned} & \max \quad z \\ & \text{subject to} \quad : \\ & x(d^+(n)) - x(d^-(n)) = \begin{cases} z & \text{if } n = s \\ 0 & \text{if } n \in N \setminus \{s, t\} \\ -z & \text{if } n = t \end{cases} \quad (1) \\ & 0 \leq x_a \leq u_a \quad \forall a \in A \end{aligned}$$

其中： $x(d^+(n))$ ：自節點 n 所流出的節線流量總和

$x(d^-(n))$ ：往節點 n 所流進的節線流量總和

N ：節點所成集合。 A ：各節線所成集合

n ：節點。 $N \setminus \{s, t\}$ ：表除 s 與 t 之外節點所成的集合。

A ：節線。 x_a ：節線的實際流量。 u_a ：節線的容量。

二、最佳增量節線問題之探討

在流量的網路中，當目前網路所能提供的最大流量不符合需求的情況下，為了能提高網路的最大流量值，則須改善 P (為正整數) 條節線容量，才能使網路最大流量提昇最多，此即為最佳增量節線問題 (The most augmenting arc problem)。當 $P = 1$ 時，稱為最佳單一增量節線。當 $P > 1$ 時，稱為最佳多增量節線。

相對於流量問題，接著說明切割的觀念，令 S 表網路中包含節點 s 及其他連接節點但不包含節點 t 的集合， N 表所有節點組成的集合，則 $S^c = N - S$ 。則 $C = \{(i, j) \mid i \in S, j \in S^c\}$ 稱為分隔節點 s 與節點 t 的一個切割集合。又 $\text{cap}(C) = \sum u_{ij}, (i, j) \in (S, S^c)$ 稱為切割集合 C 的容量總和，其中 u_{ij} 表節線 (i, j) 的容量。

定理：最大流量等於最小切割定理 (maximum-flow minimum-cut theorem)

對任一流量的網路模式，其網路的最大流量必等於最小切割集合的容量總和 [8,9,10]。

根據最大流量等於最小切割定理來思考最佳單一增量節線問題，可得下列推論 [3,14,15,17]：

推論：改善單一節線的容量，無法將最大流量提昇超過不包含此節線的切割集合的容量總和。以符號而言 $a \notin C$ ，則 $\Phi(a) \leq \text{cap}(C)$ 。其中， C 為一不含節線 a 的切割集合， $\Phi(a)$ 是改善節線 a 容量後網路新的最大流量，而 $\text{cap}(C)$ 為 C 的容量總和。

推論：網路最大流量若能經由擴增單一節線的容量而提高時，則最佳增量節線必屬於原來網路的某一最小切割集合。因為，若原來的網路最小切割集合的容量總和無法提昇，則網路的最大流量無法提昇。

推論：若最佳單一增量節線不存在，若且唯若，所有最小切割集合之交集為空集合。

綜合以上推論可知，最佳單一增量節線必為式 (2) 之解：

$$\max_{\forall a \in C^*} (\min_{\forall C, a \notin C} (\text{cap}(C))) \quad (2)$$

其中 a 為一節線， C^* 為最小切割集合，而 C 為不包含節線 a 之切割集合， $\text{cap}(C)$ 為 C 的容量總和，若最佳單一增量節線不存在時，式 (2) 之解等於 $\text{cap}(C^*)$ 。

推論：對某一節線 a ，擴充其容量而使網路產生一個新的最小切割集合， $CE(a)$ 。如果節線 a 不是原來網路之最佳單一增量節線，則最佳單一增量節線必屬於原來網路之最小切割集合與 $CE(a)$ 之交集。

由推論 III 與 IV 可得推論 V。

推論：如果網路最佳 2 增量節線存在，則其中一節線 a 屬於原來網路的最小切割集合，另一節線必屬於 $CE(a)$ 。

肆 演算法

一、最佳單一增量節線理論

(一)最佳單一增量節線演算法 (演算法 I)：

根據參.二之推論 I~IV, 可發展最佳單一增量節線演算法 (演算法 I) 如下：

步驟一：對原來網路，求解其最大流量及最小切割集合 S 。

步驟二：自 S 中挑選出一未經處理的節線 a 。

步驟三：對原來的網路，將此節線容量設為極大，其他節線容量不變。

步驟四：求解步驟三的網路最大流量及最小切割集合 $CE(a)$ 。

步驟五：若步驟四所得最大流量為目前最大者，則記錄此節線 a 及最大流量。

步驟六： $S_{new} = S_{old} \cap CE(a)$ 。

步驟七：若 $S = \phi$ (空集合) 則停止，否則回到步驟二。

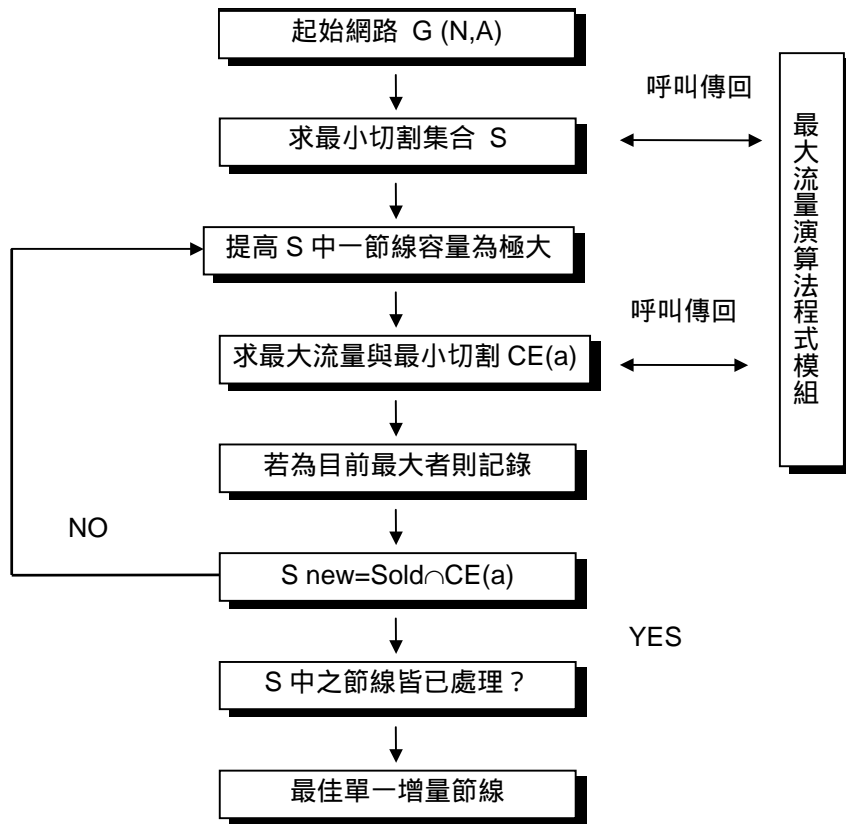
完成演算法的所有步驟後，最後所記錄的節線即為最佳單一增量節線。而目前的網路最大流量與原來的網路最大流量之差，即為網路最大流量的擴增量，亦為節線容量的擴增量。若此擴增量為 0，則表示最佳單一增量節線不存在。

本演算法乃以最大流量等於最小切割定理為基礎加以發展。在最大流量的網路問題中，網路最大流量受限於最小切割集合的容量總和，所以欲提昇網路的最大流量必須先將最小切割集合的節線容量加以擴增。若最佳單一增量節線不屬於最小切割集合，則網路最大流量將無法提昇。因此，只需對最小切割集合中的節線加以處理。

接著，考慮存在多組最小切割集合的情況，若最佳單一增量節線存在，必定在多組最小切割集合的交集上。再者，對原來網路的最小切割集合中的某一節線 a ，擴增其容量而使網路產生一個新的最小切割集合 $CE(a)$ ，如果節線 a 不是原來網路的最佳單一增量節線，則更好的搜尋方向將在原來網路的最小切割集合與 $CE(a)$ 之交集上。本研究運用擴增節線容量前後的最小切割集合作交集的技巧，大幅減少所處理的節線數，來提昇其最佳增量節線的搜尋效率。

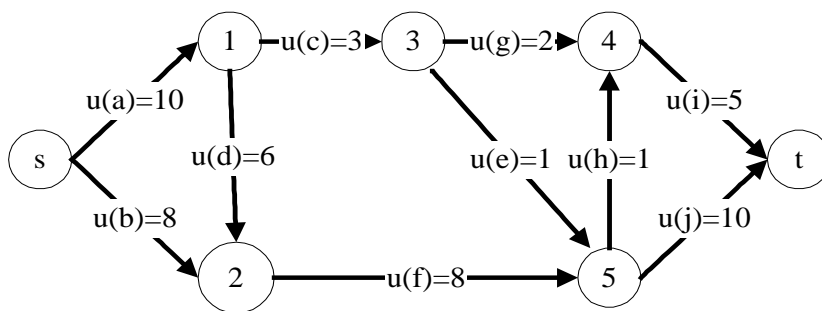
就演算法的複雜度 (Complexity) 而言，最大流量問題的演算法複雜度為 $O(|N|^3)$ (或更好) ($|N|$ 為節點個數) [19]。而最佳單一增量節線演算法，只需對最小切割集合的每一節線分別求解一次最大流量問題，所以演算法的複雜度為 $O(|C^*| |N|^3)$ ，其中 $|C^*|$ 表最小切割集合節線數。

(二)演算法流程圖：



圖一 最佳單一增量節線演算法流程圖

(三)說明範例：



圖二 最佳單一增量節線範例

考慮如圖二之網路，以演算法 I 求其最佳單一增量節線，計算過程如下：

- 步驟一：最小切割集合 $S : \{ c, f \}$ 。最大流量：3 + 8 = 11。
- 步驟二：從 S 中任選一條節線 c 。
- 步驟三：令節線 c 的容量 $u(c) = \infty$ 。其他節線容量與原網路相同。
- 步驟四：最小切割集合 $CE(c) : \{ e, f, g \}$ 。最大流量：2 + 1 + 8 = 11。
- 步驟五：改善節線 c ，提昇節線 c 容量後之新的網路最大流量：11。
- 步驟六： $S = S \cap CE(c) = \{ f \}$ 。
- 步驟七：從 S 中任選一條節線 f 。
- 步驟八：令節線 f 的容量 $u(f) = \infty$ 。其他節線容量與原網路相同。
- 步驟九：最小切割集合 $CE(f) : \{ g, h, j \}$ 。最大流量：2 + 1 + 10 = 13。
- 步驟十：改善節線 f 與提昇節線 f 容量後之新的網路最大流量：13。
- 步驟十一： $S = S \cap CE(f) = \phi$ (空集合)，停止演算。

由步驟十，可得網路最大流量 13。經由提昇節線 f 容量 2，可使網路最大流量由 11 提昇為 13。節線 f 為最佳單一增量節線。

二、最佳多增量節線理論

(一)最佳2增量節線演算法 (演算法 II)

在參.二之推論 V 中提及，如果網路的最佳 2 增量節線存在，則其中一節線 a 屬於原來網路的最小切割集合，另一節線必屬於 $CE(a)$ 。此推論在說明，若網路存在最佳 2 增量節線 a 與 b ，則 a 屬於原先網路的最小切割集合，而擴增 a 節線容量後的網路最小切割集合為 $CE(a)$ 。若節線 b 不屬於 $CE(a)$ ，則擴增節線 b 的容量並無法提昇 $CE(a)$ 的容量總和，如此則網路的最大流量無法提昇超過 $cap(CE(a))$ ，亦即與只擴增 a 節線容量所得結果相同。所以，節線 b 必屬於 $CE(a)$ ，而擴增節線 b 容量才能將網路的最大流量提昇超過 $cap(CE(a))$ 。因此，根據推論 V 可發展最佳 2 增量節線的演算法 (演算法 II) 如下：

- 步驟一：對原來網路，求解其最大流量及最小切割集合 S 。
- 步驟二：自 S 中挑選出一未經處理的節線 a 。
- 步驟三：對原來網路，將此節線 a 之容量設為極大，其他節線容量不變。
- 步驟四：利用最佳單一增量節線演算法求解經步驟三修正後網路的最佳單一增量節線。

步驟五：若步驟 4 所求解之網路最大流量大於從前所記錄者，則記錄此節線 a 與所求出之最佳單一增量節線及新的最大流量值。

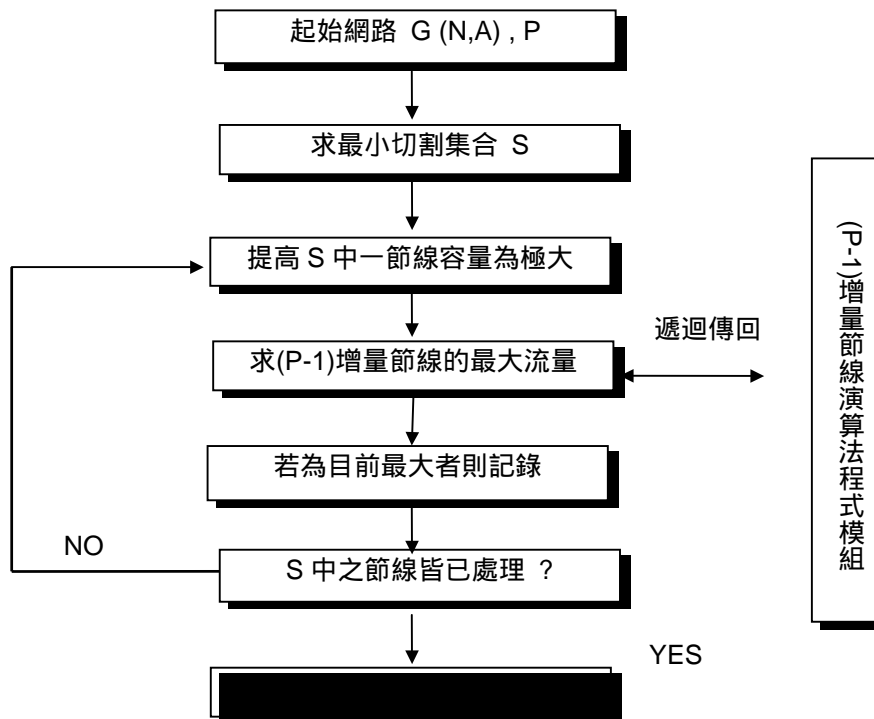
步驟六：將節線 a 從 S 中刪除。

步驟七：若 $S = \phi$ (空集合) 則停止，否則回到步驟二。

在演算法之步驟五中，最後所記錄之節線 a 與最佳單一增量節線即為最佳 2 增量節線。而最大流量即為最佳 2 增量節線所擴增節線容量後新的網路最大流量。若網路最大流量的擴增量為 0，則表示最佳 2 增量節線不存在。

由上述的演算法可知，最佳 2 增量節線並非重覆計算最佳單一增量節線演算法 2 次而求得。而是將最佳單一節線演算法納入步驟 4 中，針對最小切割集中所有的節線加以考慮而完成，故可獲致全域性的最佳解。因此，可據此關係推論，祇要存在最佳 (P-1) 增量節線演算法，則可發展出最佳 P 增量節線演算法 (演算法 III)。

(二)演算法流程圖：



圖三 最佳 P 增量節線演算法流程圖

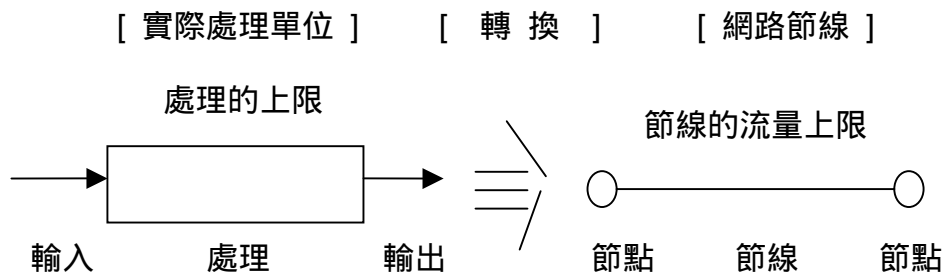
伍 最佳增量節線之應用範例

一、應用說明

最佳增量節線理論應用在實際決策方面，首先面臨的問題是最佳增量節線理論可以解決什麼樣的實際問題，這些問題是否具有共通的特徵或假設，本研究提出將最佳增量節線理論應用於實際決策的假設如下：

1. 實際問題所追求的決策目標，為企業的實際問題轉換為網路問題中的最大流量。亦即所求目標為網路的最大流量。
2. 網路中各節線的容量，皆能轉成相同的單位來處理。
3. 網路中各擴增節線容量之單位成本為相同。
4. 在網路中以投入的直接資源（人員、設備、土地、資金等）推估各節線的容量，並允許自由的配置。

最佳增量節線理論在實際的決策上所面臨的另一個問題是，如何將採購、製造、配銷等欲探討的實際問題，轉換為抽象的網路問題。本研究提出模式轉換的方法，以圖四加以說明。



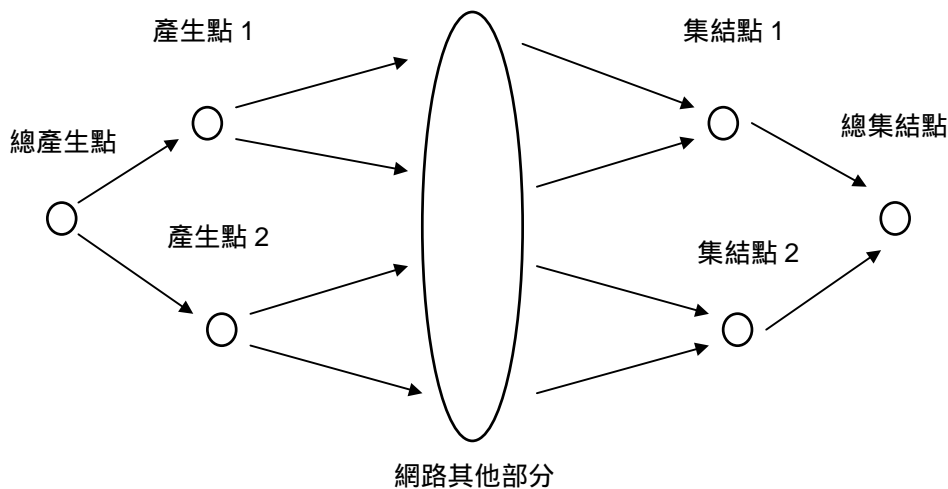
圖四 模式轉換示意

處理乃是介於輸入與輸出之間的單位，通常存在處理的上限。在實務的管理上，處理單位可以是採購過程中的倉庫，亦或是製造過程中的機器，也可以是配銷過程中的物流中心。

模式轉換的方法，乃是將實際問題中各個處理的輸入與輸出部分，轉換為網路中兩相鄰的節點，再將處理轉換為網路中兩相鄰節點上的節線，而將處理的上限轉換為網路中節線的流量上限。

將實際面臨的問題轉為網路問題後，可運用最大流量理論來評估網路的最大流量。若網路最大流量不能滿足決策目標，可運用最佳增量節線理論來搜尋最佳增量節線並擴增其節線容量，使網路最大流量提昇最多。

將實際面臨的問題轉換為網路問題後，若存在多個產生點與多個集結點時，依然可以利用本文所提之演算法來評估網路的最大流量與蒐尋最佳增量節線。在一般的 s-t 網路中，通常僅能處理一個產生點與一個集結點的網路。對於多產生點與多集結點的網路，Hitchcock[16]提出透過虛擬的總產生點與總集結點的觀念，先行轉化為單一產生點與單一集結點的網路 (如圖五所示) 再進行處理。因為，連接到總產生點與總集結點的節線乃是虛擬的節線[5]，在處理上其節線的容量上限應設為極大。



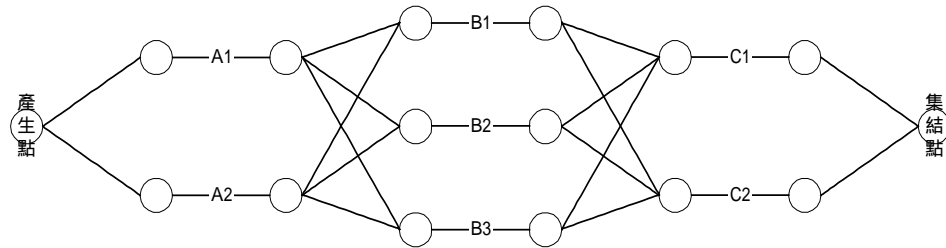
圖五 多個產生點與多個集結點之網路調整圖

最佳增量節線理論係以整體性規劃的觀點，考慮同時擴增多條的節線容量，倘若能找到一條從產生點到集結點的路徑，而該路徑具有最少的節線數 l (為正整數)，則此路徑的節線數 l 為最佳多增量節線理論所探討的擴增節線數之上限。

二、應用範例—X公司

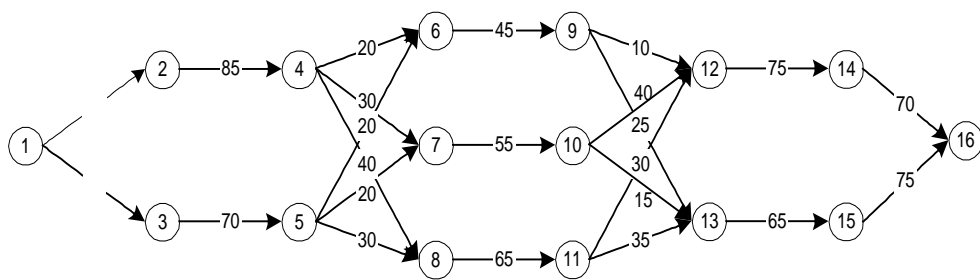
(一)範例說明

X 公司為一零件加工的製造廠商，其零件的加工製程必須經過 A、B、C 三個階段。而階段 A 有 A1、A2 兩部機器，階段 B 有 B1、B2、B3 三部機器，階段 C 有 C1、C2 兩部機器。如圖六所示。



圖六 X 公司網路示意圖

其中，原料經由輸送帶分別運至 A1、A2 兩部機器的輸送量為 80、70 單位 (件/天，以下簡稱單位)。A1、A2 兩部機器的最大產量為 85、70 單位。A1 機器運至 B1、B2、B3 三部機器的輸送量為 20、30、40 單位。A2 機器運至 B1、B2、B3 三部機器的輸送量為 20、20、30 單位。B1、B2、B3 三部機器的最大產量為 45、55、65 單位。B1 機器運至 C1、C2 兩部機器的輸送量為 10、25 單位。B2 機器運至 C1、C2 兩部機器的輸送量為 40、15 單位。B3 機器運至 C1、C2 兩部機器的輸送量為 30、35 單位。C1、C2 兩部機器的最大產量為 75、65 單位。C1、C2 兩部機器運至倉庫的輸送量為 70、75 單位。如圖七所示。



圖七 X 公司網路圖

表一 X 公司網路節點說明

節點編號	節點說明
------	------

01	網路產生點。
02	A1 機器的節點入口。
03	A2 機器的節點入口。
04	A1 機器的節點出口。
05	A2 機器的節點出口。
06	B1 機器的節點入口。
07	B2 機器的節點入口。
08	B3 機器的節點入口。
09	B1 機器的節點出口。
10	B2 機器的節點出口。
11	B3 機器的節點出口。
12	C1 機器的節點入口。
13	C2 機器的節點入口。
14	C1 機器的節點出口。
15	C2 機器的節點出口。
16	網路集結點。

表二 X 公司網路節線說明

節線編號	節線說明
(01,02)	X 公司分配原料至 A1 機器之最大流量，其上限為 80
(01,03)	X 公司分配原料至 A2 機器之最大流量，其上限為 70
(02,04)	A1 機器之最大產量，其上限為 85
(03,05)	A2 機器之最大產量，其上限為 70
(04,06)	A1 機器運至 B1 機器的最大輸送量，其上限為 20
(04,07)	A1 機器運至 B2 機器的最大輸送量，其上限為 30
(04,08)	A1 機器運至 B3 機器的最大輸送量，其上限為 40
(05,06)	A2 機器運至 B1 機器的最大輸送量，其上限為 20
(05,07)	A2 機器運至 B2 機器的最大輸送量，其上限為 20
(05,08)	A2 機器運至 B3 機器的最大輸送量，其上限為 30
(06,09)	B1 機器之最大產量，其上限為 45
(07,10)	B2 機器之最大產量，其上限為 55
(08,11)	B3 機器之最大產量，其上限為 65
(09,12)	B1 機器運至 C1 機器的最大輸送量，其上限為 10
(09,13)	B1 機器運至 C2 機器的最大輸送量，其上限為 25
(10,12)	B2 機器運至 C1 機器的最大輸送量，其上限為 40
(10,13)	B2 機器運至 C2 機器的最大輸送量，其上限為 15
(11,12)	B3 機器運至 C1 機器的最大輸送量，其上限為 30
(11,13)	B3 機器運至 C2 機器的最大輸送量，其上限為 35
(12,14)	C1 機器之最大產量，其上限為 75
(13,15)	C2 機器之最大產量，其上限為 65
(14,16)	C1 機器運至倉庫的最大輸送量，其上限為 70
(15,16)	C2 機器運至倉庫的最大輸送量，其上限為 75

(二)計算結果

依據最佳增量節線演算法 I、II、III 所發展的最佳增量節線計算機程式模組加以計算，結果整理如下：

表三 X 公司之節線資源配置表

節線編號	節線容量	F ₀	F ₀ %	F ₁	F ₁ %	F ₂	F ₂ %	F ₃	F ₃ %	F ₄	F ₄ %	F ₅	F ₅ %	F ₆	F ₆ %	F ₇	F ₇ %
(01,02)	80	80	100	80	100	80	100	80	100	85	106	85	106	80	100	80	100
(01,03)	70	55	78.6	65	92.9	70	100	70	100	70	100	70	100	80	114	∞	∞
(02,04)	85	80	94.1	80	94.1	80	94.1	80	94.1	85	100	85	100	80	94.1	80	94.1
(03,05)	70	55	78.6	65	92.9	70	100	70	100	70	100	70	100	80	114	∞	∞
(04,06)	20	15	75	15	75	15	75	20	100	20	100	20	100	15	75	20	100
(04,07)	30	30	100	30	100	30	100	30	100	30	100	30	100	30	100	30	100
(04,08)	40	35	87.5	35	87.5	35	87.5	30	75	35	87.5	35	87.5	35	87.5	30	75
(05,06)	20	10	50	20	100	20	100	20	100	20	100	20	100	30	150	15	75
(05,07)	20	15	75	15	75	20	100	20	100	20	100	20	100	20	100	15	75
(05,08)	30	30	100	30	100	30	100	30	100	30	100	30	100	30	100	∞	∞
(06,09)	45	25	55.6	35	77.8	35	77.8	40	88.9	40	88.9	40	88.9	45	100	35	77.8
(07,10)	55	45	81.8	45	81.9	50	90.9	50	90.9	50	90.9	50	90.9	50	90.9	45	81.8
(08,11)	65	65	100	65	100	65	100	60	92.3	65	100	65	100	65	100	∞	∞
(09,12)	10	0	0	10	100	10	100	40	400	40	400	10	100	45	450	10	100
(09,13)	25	25	100	25	100	25	100	0	0	0	0	30	120	0	0	25	100
(10,12)	40	40	100	30	75	35	75	40	100	40	100	40	100	40	100	30	75
(10,13)	15	5	33.3	15	100	15	100	10	66.7	10	66.7	10	66.7	10	66.7	15	100
(11,12)	30	30	100	30	100	30	100	30	100	30	100	30	100	30	100	30	100
(11,13)	35	35	100	35	100	35	100	30	85.7	35	100	35	100	35	100	∞	∞
(12,14)	75	70	93.3	70	93.3	75	100	110	147	110	147	80	107	115	153	70	93.3
(13,15)	65	65	100	75	115	75	115	40	61.5	45	69.2	75	115	45	69.2	∞	∞
(14,16)	70	70	100	70	100	75	107	110	157	110	157	80	114	115	164	70	100
(15,16)	75	65	86.7	75	100	75	100	40	53.3	45	60	75	100	45	60	∞	∞
最大流量		135		145		150		150		155		155		160		∞	

註：1.最佳 P 增量節線的計算結果若存在多組解時，以最先找到的解記錄之。

2.F_P：如表每一列，為最佳 P 增量節線各節線之實際流量。P = 0, 1, ..., 7。

3.F_P%：如表每一列，為最佳 P 增量節線各節線之實際流量與容量的比值，表各節線的

資源使用率。若比值超過 100%，表示該節線為 P 增量節應改善的節線。
4.最大流量：如表最後橫列，為最佳 P 增量節線的網路最大流量。

(三)決策分析與建議

1.就最佳增量節線理論的觀點

- (1)在現有資源配置的情況下，可得到網路最大流量為 135 單位與各節線的實際流量及資源使用率。如表三 ($F_0, F_0\%$) 所示。
- (2)在允許改善單一增量節線容量的條件下，找到網路的最佳單一增量節線為 C2 機器 (節線 (13,15))。若將其節線容量由 65 單位擴增為 75 單位，則網路最大流量將由 135 單位提高為 145 單位。如表三 ($F_1, F_1\%$)所示。
- (3)在允許改善多增量節線容量的條件下，以 $P=2$ 為例，將 C2 機器的最大產量由 65 單位擴增至 75 單位，並配合 C1 機器運至倉庫的最大輸送量 (節線 (14,16)) 由 70 單位擴增至 75 單位，則網路的最大流量將由 135 單位提高為 150 單位。如表三 ($F_2, F_2\%$) 所示。

2.最佳增量節線理論與限制理論之比較

- (1)考慮 $P=1$ 與 $P=2$ 時，使用最佳增量節線理論的方法與限制理論的方法所獲致的結果是相同的。
- (2)考慮 $P=4$ 時，發現最佳增量節線理論與限制理論的差異。最佳增量節線理論建議同時擴增四條節線 (01,02), (09,12), (12,14), (14,16) 的容量，即可達到最大流量 155 單位。而限制理論則受限於 $P=2$ 時的擴增節線 (13,15), (14,16) 的改善方案，則只能達到的最大流量為 150 單位。
- (3)考慮 $P=6$ 時，最佳增量節線理論建議同時擴增 6 條節線 (01,03), (03,05), (05,06), (09,12), (12,14), (14,16) 的容量，可達到最大流量 160 單位。而限制理論則受限於 $P=2$ 時的擴增節線 (13,15), (14,16) 的改善方案，再同時擴增 4 條節線 (01,02), (04,07), (12,14), (14,16) 的節線容量，才能達到最大流量 155 單位。

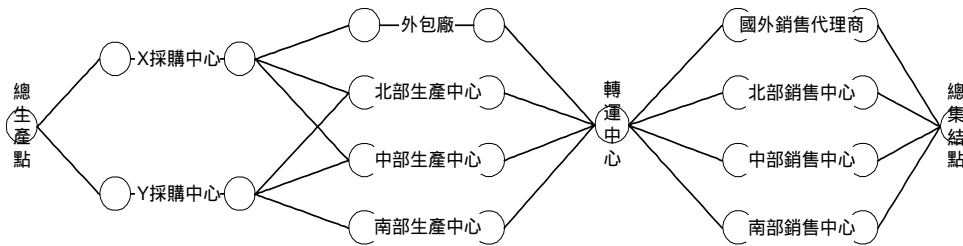
3.就整體資源配置的觀點

- (1)可根據表三作為績效考核的依據。以 $P=0$ 為例，節線 (09,12) 的實際流量為 0，對整體的流量並無任何的幫助。
- (2)可根據表三作為資源配置的依據。以 $P=1$ 為例，建議將資源使用率較低的節線 ((04,06), (05,07), (10,12)) 資源優先配置到節線 (13,15) 上。
- (3)可根據表三與企業的決策目標，找到最適的資源配置。以網路最大流量 150 單位為企業的決策目標為例， $P=2$ 與 $P=3$ 皆可達到目標，但 $P=2$ 只需擴增兩條節線 ((13,15), (14,16)) 的容量，而 $P=3$ 卻需擴增三條節線 ((09,12), (12,14), (14,16)) 的容量才能達到。
- (4)由表三可知當 $P=7$ 時，可發現由產生點至集結點有一節線數為七之路徑，而且對產生點至集結點的所有路徑而言，最少節線數為 7。若能同時提昇此路徑上所有節線容量上限，即可任意提昇網路最大流量。亦即如果同時改善七條或七條以上之節線容量上限時，則可將網路最大流量任意提昇。理論上，若允許同時提昇從產生點至集結點上任何一路徑之所有節線容量上限時，可將網路最大流量任意提昇。但實際上，節線容量上限的提昇必須投入資源，在考慮實際可供改善節線容量之資源有限的情況下，可能無法任意提昇過多節線之容量上限。因此，節線資源配置表三可作為各節線資源的績效評估，並提供整體資源配置之參考，作為決策者擬定改善節線容量之方案。

三、應用範例—Z公司

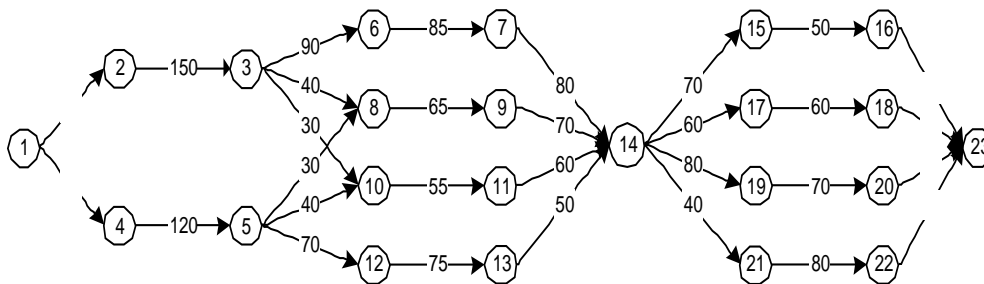
(一)範例說明

Z 公司為一整合採購、製造與配銷之飲料製造廠商。所需之原料由 X、Y 兩個採購中心負責採購。原料的供應商承諾無限制供應原料。原料經由北、中、南三個生產中心與一個外包廠商負責製造。並透過一個轉運中心將產品運至北、中、南三個國內銷售中心與國外銷售代理商銷售。如圖八所示。



圖八 Z 公司網路示意圖

其中，X 採購中心的最大採購量為 150 單位 (千箱/天，以下簡稱單位)，供應外包廠商與北、中兩個生產中心的最大流量為 90、40、30 單位。Y 採購中心的最大採購量為 120 單位，供應北、中、南三個生產中心的最大流量為 30、40、70 單位。外包廠商與北、中、南三個生產中心的最大產量為 85、65、55、75 單位。外包廠商與北、中、南三個生產中心至轉運中心的最大運送量為 80、70、60、50 單位。轉運中心至國外銷售代理商與北、中、南三個國內銷售中心的最大運送量為 70、60、80、40 單位。國外銷售代理商與北、中、南三個國內銷售心的最大預估需求量為 50、60、70、80 單位。如圖九所示。



註：1.總產生點連接 X、Y 兩個採購中心的節線並無實際的容量限制，以符號∞表示無限大。
2.四個銷售單位連接總集結點的節線是虛擬的觀念，並無實際的容量限制，以符號∞表示無限大。

圖九 Z 公司網路圖

(二)運算過程

依據最佳增量節線演算法 I、II、III，與最佳增量節線計算機程式模組的計算，結果整理如下：

表四 Z 公司之節線資源配置表

節線編號	節線容量	F ₀	F ₀ %	F ₁	F ₁ %	F ₂	F ₂ %	F ₃	F ₃ %	F ₄	F ₄ %	F ₅	F ₅ %	F ₆	F ₆ %
(01,02)	∞	100	*	130	*	150	*	150	*	150	*	150	*	150	*
(01,04)	∞	120	*	120	*	110	*	120	*	120	*	125	*	∞	*
(02,03)	150	100	66.7	130	86.7	150	100	150	100	150	100	150	100	150	100
(03,06)	90	50	55.6	80	88.9	80	88.9	80	88.9	80	88.9	80	88.9	80	88.9
(03,08)	40	35	87.5	35	87.5	40	100	40	100	40	100	40	100	40	100
(03,10)	30	15	50	15	50	30	100	30	100	30	100	30	100	30	100
(04,05)	120	120	100	120	100	110	91.7	120	100	120	100	125	104	∞	∞
(05,08)	30	30	100	30	100	25	83.3	25	83.3	25	83.3	25	83.3	25	83.3
(05,10)	40	40	100	40	100	25	62.5	25	62.5	25	62.5	25	62.5	25	62.5
(05,12)	70	50	71.4	50	71.4	60	85.7	70	100	70	100	75	107	∞	∞
(06,07)	85	50	58.8	80	94.1	80	94.1	80	94.1	80	94.1	80	94.1	80	94.1
(07,14)	80	50	62.5	80	100	80	100	80	100	80	100	80	100	80	100
(08,09)	65	65	100	65	100	65	100	65	100	65	100	65	100	65	100
(09,14)	70	65	92.9	65	92.9	65	92.9	65	95.9	65	95.9	65	95.9	65	95.9
(10,11)	55	55	100	55	100	55	100	55	100	55	100	55	100	55	100
(11,14)	60	55	91.7	55	91.7	55	91.7	55	91.7	55	91.7	55	91.7	55	91.7
(12,13)	75	50	66.7	50	66.7	60	80	70	93.3	70	93.3	75	100	∞	∞
(13,14)	50	50	100	50	100	60	120	70	140	70	140	75	150	∞	∞
(14,15)	70	50	71.4	50	71.4	50	71.4	50	71.4	70	100	50	71.4	50	71.4
(14,17)	60	60	100	60	100	60	100	60	100	60	100	60	100	60	100
(14,19)	80	70	87.5	70	87.5	70	87.5	80	100	70	87.5	165	206	∞	∞
(14,21)	40	40	100	70	175	80	200	80	200	70	175	0	0	40	100
(15,16)	50	50	100	50	100	50	100	50	100	70	140	50	100	50	100
(16,23)	∞	50	*	50	*	50	*	50	*	70	*	50	*	50	*
(17,18)	60	60	100	60	100	60	100	60	100	60	100	60	100	60	100
(18,23)	∞	60	*	60	*	60	*	60	*	60	*	60	*	60	*
(19,20)	70	70	100	70	100	70	100	80	114	70	100	165	236	∞	∞
(20,23)	∞	70	*	70	*	70	*	80	*	70	*	165	*	∞	*
(21,22)	80	40	50	70	87.5	80	100	80	100	70	87.5	0	0	40	50
(22,23)	∞	40	*	70	*	80	*	80	*	70	*	0	*	40	*
最大流量		220		250		260		270		270		275		∞	

註：1.最佳 P 增量節線的計算結果若存在多組解時，以最先找到的解記錄之。

2.F_P：如表每一列，為最佳 P 增量節線各節線之實際流量值，P=0, 1, 2, ..., 6。

3.F_P%：如表每一列，為最佳 P 增量節線各節線之實際值與容量的比值，表各節線的資源使用率。若比值超過 100%表示該節線為 P 增量節應改善的節線。

4.最大流量：如表最後橫列，為最佳 P 增量節線的網路最大流量。

5.*：因各虛擬節線無實際容量限制，節線的實際流量與容量的比值無實質意義，以「*」表之。

(三)決策分析與建議

1.就最佳增量節線節線理論的觀點

- (1)在現有資源配置的情況下，可得到網路的最大流量為 220 單位與各節線的實際流量及資源使用率。如表四 ($F_0, F_0\%$) 所示。
- (2)在允許改善單一增量節線容量的條件下，找到網路的最佳單一增量節線為轉運中心運至南部銷售中心的轉運流量 (節線 (14,21))。若將其節線容量由 40 單位擴增為 70 單位，則網路最大流量將由 220 單位提高為 250 單位。如表四 ($F_1, F_1\%$) 所示。
- (3)在允許改善多增量節線容量的條件下，以 $P=2$ 為例，將轉運中心運至南部銷售中心的轉運流量 (節線 (14,21)) 由 40 單位擴增至 80 單位，並配合南部製造中心至轉運中心 (節線 (13,14)) 的轉運流量由 50 單位擴增至 60 單位，則網路的最大流量將由 220 單位提高為 260 單位。如表四 ($F_2, F_2\%$) 所示。

2.最佳增量節線理論與限制理論之比較

- (1)考慮 $P=1$ 時，使用最佳增量節線理論的方法與限制理論的方法所獲致的結果為相同的。
- (2)考慮 $P=2$ 時，發現最佳增量節線理論與限制理論的差異。最佳增量節線理論所獲致的最大流量為 260 單位，而限制理論則受限於 $P=1$ 時的擴增節線 (14,21) 的改善方案，則只能達到的最大流量為 250 單位。
- (3)考慮 $P=3$ 時，最佳增量節線理論與限制理論所獲致的結果為一致的。
- (4)考慮 $P=5$ 時，最佳增量節線理論建議同時擴增五條節線 (04,05), (05,12), (13,14), (14,19), (19,20) 的節線容量，可達到最大流量 275 單位。而限制理論則受限於 $P=3$ 時的擴增節線 (13,14), (14,21), (15,16) 則只能達到的最大流量為 270 單位。

3.就整體資源配置的觀點

- (1)可根據表四作為績效考核的依據。以 $P=0$ 為例，兩條節線 (03,10) (21,22) 的實際流量為節線容量的一半。
- (2)可根據表四作為資源配置的依據。以 $P=1$ 為例，建議將資源使用率較低的節線 ((3,10), (12,13)) 資源優先配置到節線 (14,21) 上。

(3)與前例相同,由表四可發現由產生點至集結點的路徑最少節線數為六。

陸 結論與建議

本研究所發展的最佳增量節線計算機程式模組,採用遞迴的方式來處理多條節線的搜尋,其具有結構精簡與易於維護等優點。對於以最佳增量節線程式模組的執行效率而言,影響最佳增量節線搜尋的關鍵因素在於最小切割集中的節線數目。

對於最佳增量節線理論與限制理論之比較方面,在提昇網路最大流量的問題中,限制理論可採用在實體限制因素下的改善步驟來處理問題。若只考慮擴增單一節線容量的情況,最佳單一增量節線與限制理論所得到的結論是相同的。

但如果考慮同時擴增多條節線容量的情況,限制理論採用的逐步改善方式卻形成另一形式的限制條件,若系統存在全域性的最佳解時,限制理論所獲致的解不能保證為最佳解,而最佳多增量節線理論則以整體性的觀點來考慮問題,採用全域搜尋的方法而避開了限制理論之逐步改善所形成的限制,可獲致全域性的最佳解。

最佳增量節線理論在實際決策的應用上,可適用於追求決策目標極大化的問題。例如:增加製造的生產量、提高物流的運輸量以及改善需求的供應量等範疇,透過轉換模式將實際的問題轉換成抽象的網路問題,來求解網路的最大流量與最佳增量節線。本研究所探討的最佳增量節線問題,是假設擴增節線容量的單位成本是一致的,且總擴增節線容量的總預算並無限制,但此假設在實際的運用上並非常態,若能考慮擴增節線容量的成本因素,即增加網路中每一節線的單位容量成本是有差異的,在固定預算的限制因素下,對於增量節線問題所造成新的影響。因此考慮擴增節線容量成本的最佳增量節線問題,則需將各節線單位容量成本與固定預算限制等因素加入網路模型的限制式中。換言之,如何在固定預算與各節線的擴增容量成本的限制下搜尋最佳多增量節線,是未來研究之可行方向。

參考文獻

李榮貴,「限制理論:製造策略的新觀念」,《機械工業雜誌》,第 117 期,1992 年 12 月,頁 212-223。

吳鴻輝、李榮貴,「利用限制理論落實改革」,《管理雜誌》,第 255 期,1995 年 9 月,頁 98-100。

- 賀力行、許慶基、張靖，「最佳增量節線在軍事後勤運輸的應用與理論研究」，第四屆國防管理學術暨實務研討會，1996年3月21日。
- Ball, M. O., Golden, B. L., and Vohra, R.V., "Finding the Most Vital Arcs in a Network", *Operations Research Letters*, Vol.8, 1989.
- Corley, H.W., and Y. Sha, David, "Most Vital Links and Nodes in Weighted Networks", *Operation Research Letters*, Vo.1, No.4, Sep, 1982.
- Cunningham, W. H. "A Network Simplex Method", *Mathematical Programming*, Vol. 11, 1976, pp.105-116.
- Dantzig, G. B., and Fulkerson, D. R., "Computation of Maximal Flows in Networks", *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 2, 1955.
- Ford, L. R., and Fulkerson, D. R., "Maximal Flow Through a Network", *Can. Journal of Math.*, Vol. 8, 1956, pp.399-404.
- Ford, L. R., and Fulkerson, D. R., "A Primal-Dual Algorithm for the Capacitated Hitchcock Problem", *Naval Res. Logistics Quart.*, Vol.4, 1957, pp.47-54
- Ford, L. R., and Fulkerson, D. R., "Flow in Networks", Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. 1962.
- Goldratt, E. M., "The Goal: A Process of Ongoing Improvement", Croton-on-Hudson, New York: North River Press, Inc., 1986.
- Goldratt, E. M., "Theory of Constraints", Croton-on-Hudson, NY: North River Press, 1990.
- Goldratt, E. M., and Robert F., "The Race: For a Competitive Edge", Croton-on-Hudson, New York: North River Press, Inc., 1986.
- Ho, Li-Hsing, "P Most Augmenting Arcs in Flow Networks", *Ph.D. Dissertation*, The University of Texas at Arlington, May 1990.
- Ho, Li-Hsing, Hsu, Chin-Chi, and Chang, Ching, "The Most Augmenting Arcs for Improving Network Flow", (Submitted to *Operations Research Letters*).
- Hitchcock, F. L., "The Distribution of 1 Product from Several Sources to Numerous Localities", *Journal of Mathematics and Physics*, 1941, pp.224-230
- Iri, M. "An Extension of the Maximum-Flow Minimum-Cut Theorem to Multi commodity Networks", *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.13, 1971.
- Maier, S. F. "Maximal Flows Using Spanning Trees", *Operations Research House*, Stanford University, Stanford, Calif., 1971.
- Orlin, J. B., "A Faster Strongly Polynomial Minimum Cost Flow Algorithm", *Operations Research*, Vol. 41, No. 2, 1993.
- Terry, N. L., and Gerhard, P., "Optimizing Theory of Constraints When New Product Alternatives Exist", *Production and Inventory Management Journal*, third quarter, 1993.

Application of The Most Augmenting Arc Theory and Logistic Management

LI-HSING HO*, CHIN-CHI HSU*, CHING-FENG LI**

**Department of Industrial Management, Chung-Hwa University*

***Department of Industrial Engineering and Management, Chung-Hwa University*

ABSTRACT

The problem of finding the most augmenting arc in a max-flow problem, that is, the arc when its capacity is properly increased can result in the maximum increase of the max-flow in the network, is studied. The most augmenting arc theory and the theory of constraints in max-flow network are both discussed and compared. Based on the theorem that the max-flow equals min-cut in network theory, practical algorithms for finding the most augmenting arc are developed. Explaining examples and computer programs of the most augmenting arc problem are constructed. Application examples for the most augmenting arc theory in logistic management and business decisions are provided and illustrated.

Keywords : network theory, maximum flow, augmenting arc, theory of constrain

